Modellizzazione Matematica e le prove OCSE PISA

Maria Mellone

Dipartimento di Matematica e Applicazioni R. Caccioppoli

Università degli Studi di Napoli Federico II

BUILDING THINKING CLASSROOMS

- Peter Liljedahl

- Maria Mellone, Stefano Izzo e Davide Ricciardi

Operatore Speculare e Numeri Palindromi

idraicciR edivaD

ozzI onafetS

Anna è una bambina che vive in campagna. È molto bello vivere qui, pensa sempre Anna, solo che non ho molte persone che vivono intorno a me, e quindi non ho amici con cui giocare. Un bel giorno Anna va in cantina e trova, sotto un grosso telo, un grosso specchio che non aveva mai visto prima. Anna guarda lo specchio e vede la sua immagine riflessa. Quel che accade all'improvviso è che l'immagine riflessa prende vita ed esce dallo specchio. Anna all'inizio si spaventa, ma subito la bambina la rassicura, dicendole di non aver paura. Dopo aver conversato, le due fanno subito amicizia e giocano tutto il giorno insieme. Al tramonto, la bambina dello specchio dice che deve tornare nello specchio, ma che può andarla a trovare quando vuole. Anna chiede il suo nome e come fare. La bambina le risponde: "Il mio nome è Anna, proprio come il tuo. Questo perché io sono te, ma riflessa nello specchio. Per venirmi a trovare, ti basterà dire allo specchio un qualcosa che è uguale sia nel mio che nel tuo mondo; ma ricorda, ogni giorno dovrai entrare con una chiave diversa"….

Anna il giorno dopo va davanti allo specchio e rendendosi conto della difficoltà di trovare parole o frasi di senso compiuto che siano uguali allo specchio, inizia a provare con i numeri. Infatti, usando il numero 1 riesce ad entrare tranquillamente. Arrivati al 10° giorno, Anna usa il numero 10, ma non funziona. Passa allora al numero 11 e riesce ad entrare. Il giorno successivo, capito come funzionava, utilizza direttamente il numero giusto. Esauriti i numeri a due cifre, Anna si chiede: per quanti giorni riuscirò ad entrare utilizzando i numeri a tre cifre?

All'improvviso lo specchio si rompe e Anna non riesce più ad entrare nel mondo dello specchio per incontrare la sua amica. Riceve però un aiuto dalla Anna dello specchio, la quale le dice: "Non disperare raggio di sole, controlla la cantina; c'è un altro specchio che ti permetterà di arrivare da me, ma il suo funzionamento è diverso". Anna guarda bene nella cantina e trova un altro specchio simile a quello precedente, ma su una base girevole. L'altra Anna continua "avvicinati allo specchio e utilizza il numero 18 facendo ruotare 1 volta lo specchio, oppure utilizza il numero 37 facendolo ruotare 2 volte". Anna le chiede: "come mai questi numeri?". "Facile, perché 18+81=99 che è palindromo, mentre col 37 va effettuato 2 volte, cioè 37+73=110 e 110+011=121 è palindromo". Preso allora un numero di due cifre, quante volte Anna dovrà girare lo specchio per entrare?

Definizione di speculare di un numero

Si definisce speculare di un numero naturale, il numero ottenuto invertendo le cifre che lo costituiscono.

Es: lo speculare di 1432 è 2341 e scriveremo spec(1432)=2341

Numero palindromo: Definizione

Si definisce ***palindromo*** un numero naturale che coincide col suo speculare.

Es: 1221 è un numero palindromo, infatti spec(1221)=1221

Avvertenze

È necessario specificare in quale base numerica un certo numero è palindromo. Infatti il numero 9 è palindromo in base 10 (9) e in base 8 (11) , ma non in base 9 (10).

In riferimento alla nostra attività abbiamo utilizzato la base 10.

Esempi di palindromi in base 10

Tutti i numeri ad una cifra sono palindromi.

Un numero a due cifre è palindromo se e solo se entrambe le sue cifre coincidono (11, 22, 33 ecc) e quindi esistono esattamente nove palindromi tra 10 e 100.

Un numero a tre cifre è palindromo se e solo se la prima e l'ultima cifra coincidono.

Quanti sono allora i palindromi a tre e quattro cifre?

Quanti sono allora i palindromi a tre e quattro cifre?

Possiamo esprime un palindromo a tre cifre nella forma $\boldsymbol{aba}$. Fissato $\boldsymbol{a}$, abbiamo 10 possibili scelte per $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$). Poiché ci sono 9 possibili scelte per $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \in \{1, \dots, 9\}$), le scelte totali possibili sono esattamente $9 * 10 = 90$.

Allo stesso modo, indicando con **abba** un palindromo a quattro cifre, le possibili scelte restano invariate, ottenendo $9 * 10 = 90$ combinazioni.

Elencando fino ad 8 cifre…

Numero di cifre	Forma del palindromo	Scelte per le cifre	Esempio
2	aa	$9 * 10^0$	11
3	aba	$9 * 10^1$	121
4	abba	$9 * 10^1$	1221
5	abcba	$9 * 10^2$	12321
6	abccba	$9 * 10^2$	123321
7	abcdcba	$9 * 10^3$	1234321
8	abcddcba	$9 * 10^3$	12344321

Assegnato un naturale n a k cifre:

$$\begin{cases} 10^{\left(\frac{k}{2}-1\right)} * 9 & se\ k\ è\ pari \\ 10^{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)} * 9 & se\ k\ è\ dispari \end{cases}$$

Oppure, usando una notazione più compatta:

$$9 * 10^{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1}$$

dove $\lceil * \rceil$ denota la parte intera superiore.

Generalizzando

Palindromi di profondità k

Palindromizzare un naturale

Assegnato un naturale n non palindromo, possiamo pensare di sommare ad n la quantità spec(n). Se $n + spec(n)$ è palindromo, diremo che n è un palindromo di profondità 1.
Altrimenti, posto $m = n + spec(n)$, possiamo ripetere il procedimento sommando m e $spec(m)$. Se $p = m + spec(m)$ è palindromo, diremo che n è palindromo di profondità 2, altrimenti iteriamo il ragionamento. Possiamo allora dare la seguente definizione…

Definizione di palindromo di profondità k

Sia n un numero naturale. Diremo che n è palindromo di profondità k se occorrono k iterazioni del procedimento descritto per ottenere un numero palindromo.

Osservazione

- Ogni palindromo è un palindromo di profondità 0
- Sia n un palindromo di profondità k. Se l'ultima cifra di n è diversa da 0 (cioè se non è divisibile per 10) allora anche $spec(n)$ sarà palindromo di profondità k. Ad esempio (45 è un palindromo di profondità 1 esattamente come il suo speculare 54).

Quali sono allora i numeri a due cifre palindromi di profondità k?

Primi passi (caso d+u≤9)

Prop.

Dato un naturale n a due cifre e indicate con u l'unità e con d la decina, se $d \neq u$ e $\mathrm{d} + u \leq 9$, allora n è un palindromo di profondità 1.

Dim

Osservando che $n = 10 * d + 1 * u$, dato che $\mathrm{d} + u \leq 9$, la somma $n + spec(n) = 10 * (d + u) + 1 * (u + d)$ è palindroma. Quindi n è palindromo di profondità 1.

Caso $d + u \geq 10$ (Osservazione)

Dato un naturale n a due cifre, indichiamo di nuovo con u l'unità e con d la decina. Si ottiene, come prima, $n = 10 * d + 1 * u$.
Supponiamo $d \neq u$ e $\mathrm{d} + u \geq 10$. Posto $m = n + spec(n)$, possiamo scrivere

$$m = 1 * 100 + (d + u - 9) * 10 + (u + d - 10) * 1$$

che vale $\forall d, u \mid\ d + u \geq 10$.

$$\Downarrow$$

Quindi tutti i numeri a due cifre con la stessa somma $d + u$ daranno luogo allo stesso valore di m! Basta studiare per casi tutti i possibili valori di $d + u$.

Casi $d + u = 11$ e $d + u = 10$

Se $d + u = 11$ e $d \neq u$, il numero è palindromizzato in 1 iterazione, ottenendo come somma sempre

$$m = 100(1) + 10(d + u - 9) + (d + u - 10) = 100(1) + 10(2) + (1) = 121$$

Quando $d + u = 10$ e $d \neq u$, abbiamo che $m = 100(1) + 10(1) + (0) = 110$.

Iterando il procedimento abbiamo che

$$m_2 = m + spec(m) = 110 + 011 = 121$$

che è palindromo. Quindi n è palindromo di profondità 2.

Iterazioni necessarie	$d+u$	Numeri
0	Già palindromi	11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99
1	$d+u \leq 9$	10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 63, 70, 71, 72, 80, 81, 90
1	$d+u=11$	29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92
2	$d+u=10$	19, 28, 37, 46, 64, 73, 82, 91
2	$d+u=12$	39, 48, 57, 75, 84, 93
2	$d+u=13$	49, 58, 67, 76, 85, 94
3	$d+u=14$	59, 68, 86, 95
4	$d+u=15$	69, 78, 87, 96
6	$d+u=16$	79, 97
24	$d+u=17$	89, 98

Some fun facts

- Tutti i numeri palindromi che hanno un numero pari di cifre sono divisibili per 11.Ciò rende questi numeri ***composti***, ovvero sia numeri naturali che ammettono almeno un divisore oltre ad **1** e il **numero stesso.** Quindi, i numeri composti sono i naturali non primi e diversi dall'unità.

- La reverse-and-add procedure è sempre convergente?
Non lo sappiamo. Questa rimane ancora una congettura a cui non v'è risposta. Ad esempio, è ben noto il problema del 196 (non è stato ancora provato se la procedura applicata a questo numero converge oppure no).

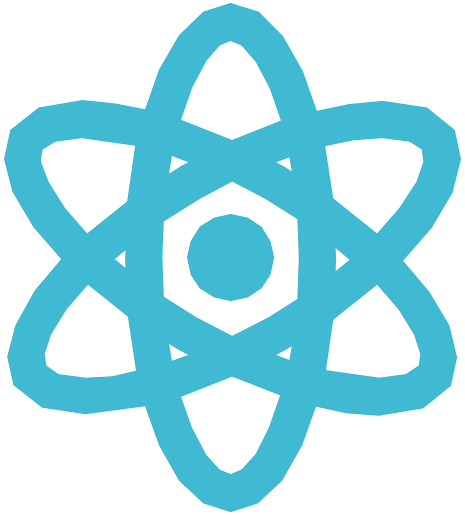
Speculari, Palindromi e…. TBBT!

Nell'episodio 73 della famosissima sit-com americana *The Big Bang Theory* , **Sheldon Cooper** individua nel numero naturale 73 il Chuck Norris dei numeri. Traduzione del dialogo originale dell'episodio (4x10, The Alien Parasite):

«73 è il ventunesimo numero primo. Il suo speculare, ovvero 37, è il dodicesimo numero primo **e inoltre $\boldsymbol{spec(12) = 21 = 7 * 3}$, ossia le cifre che compongono 73. Inoltre, 73 è un palindromo in base 2:**

$$\mathbf{(73)_2 = 1001001.}$$

Insomma, il 73 è il Chuck Norris dei numeri.»



Tutto molto divertente ma…

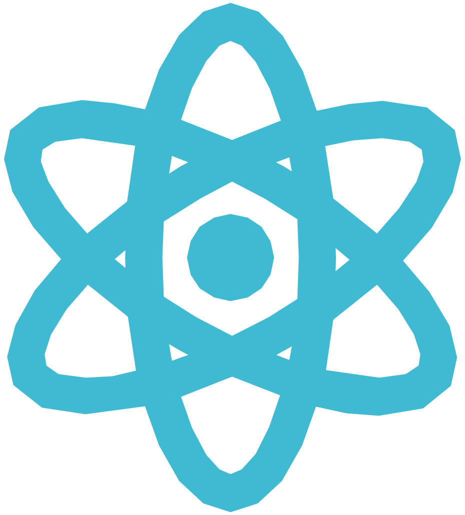
Carl Pomerance (Professore Emerito al Dartmouth College) e Chris Spicer (Professore Associato al Morningside College) hanno raccolto la sfida lanciata da Sheldon Cooper. Quest'ultimo ha infatti implicitamente formulato una congettura: 73 è l'unico numero naturale ad avere determinate caratteristiche, ossia **l'unico primo di Sheldon:**

Def. Se p_n è ***l'n-esimo primo***, esso è detto ***primo di Sheldon*** se:

(1) Se $p_n = a_k * 10^k + a_{k-1} * 10^{k-1} + \cdots + a_1 * 10 + a_0$ allora

$n = a_k * a_{k-1} * \cdots * a_1 * a_0$

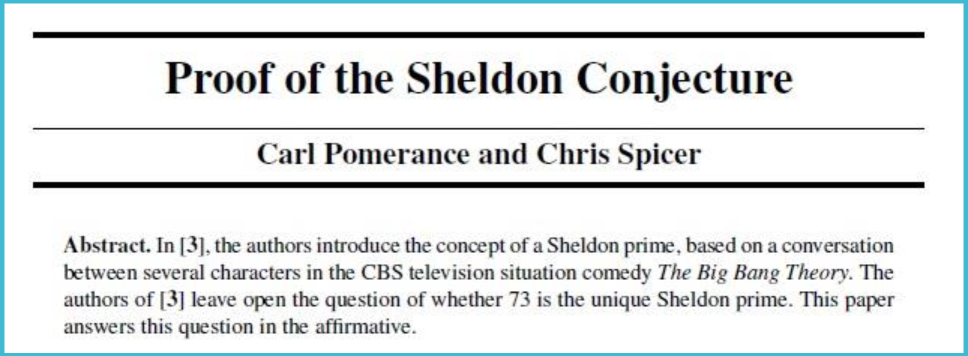
(2) $spec(p_n) = p_{spec(n)}$



Tutto molto divertente ma…

Pomerance e Spicer hanno quindi provato il seguente

<u>Teor:</u> 73 è l'unico primo di Sheldon.



Proof of the Sheldon Conjecture

Carl Pomerance and Chris Spicer

Abstract. In [3], the authors introduce the concept of a Sheldon prime, based on a conversation between several characters in the CBS television situation comedy *The Big Bang Theory*. The authors of [3] leave open the question of whether 73 is the unique Sheldon prime. This paper answers this question in the affirmative.

L'articolo è disponibile gratuitamente cliccando <u>qui</u>.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!

Stefano e Davide

Three Workshops

Building A Thinking Mathematics Classroom

Venerdì 15, 22, 29 Marzo 2019
dalle 15:00 alle 17:00

sala professori I livello
del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli studi di Napoli "Federico II"

Prof. Peter Liljedahl
Faculty of Education
Simon Fraser University
Canada

mail: liljedahl@sfu.ca
http://www.peterliljedahl.com
https://twitter.com/pgliljedahl

Abstract

We know that problem solving is an effective way for students to learn to think mathematically and to acquire deep knowledge and understanding of the mathematics they are learning.

Simply problematizing the mathematics curriculum, however, does not help constitute the practice that teachers want or students need. Equally, infusion of problem-based learning into the mathematics curriculum does not help with the transformations we want to see in our classrooms. What we need are a set of tools that, along with good problems, can build thinking students, thinking classrooms, and greater engagement in curricular mathematics.

In this series of **three workshops** we will explore just such a set of tools and learn how to apply them to everything from a problem solving session to teaching a section of the textbook.

Gli organizzatori

Maria Mellone

Tiziana Pacelli

As a strong supporter of the *Thinking Classroom* framework, we think every teacher in the world should be exposed to one of Peter Liljedahl's workshops, as it really does make you realise how we can truly help students get excited about doing math. With our small donation of Wipebook Flipcharts, we hope that we can help facilitate the delivery of more hands-on workshops for educators and help teachers to realize that they don't need to install giant expensive whiteboards to adopt this powerful framework.

If you are interested in this donation for your next event, please send me an email at frank@wipebook.com. I will need your shipping address and the number of participants attending the workshops, so that we can calculate the number of sheets required. It can typically take 7-10 business days to ship our flipcharts anywhere in North America, so the earlier we know, the faster we can ship them out to you.

Don't hesitate to touch base if you have any questions, and feel free to visit math.wipebook.com if you would like to learn more about us.

Thanks!

http://www.peterliljedahl.com


wiseGEEK


INSTITUTIONAL NORMS


NON-NEGOTIATED NORMS

400+ TEACHERS | 15 YEARS | 2+ WEEK CYCLES

RENEGOTIATING THE NON-NEGOTIATED NORMS

400+ TEACHERS | 15 YEARS | 2+ WEEK CYCLES

OPPORTUNITIES FOR THINKING

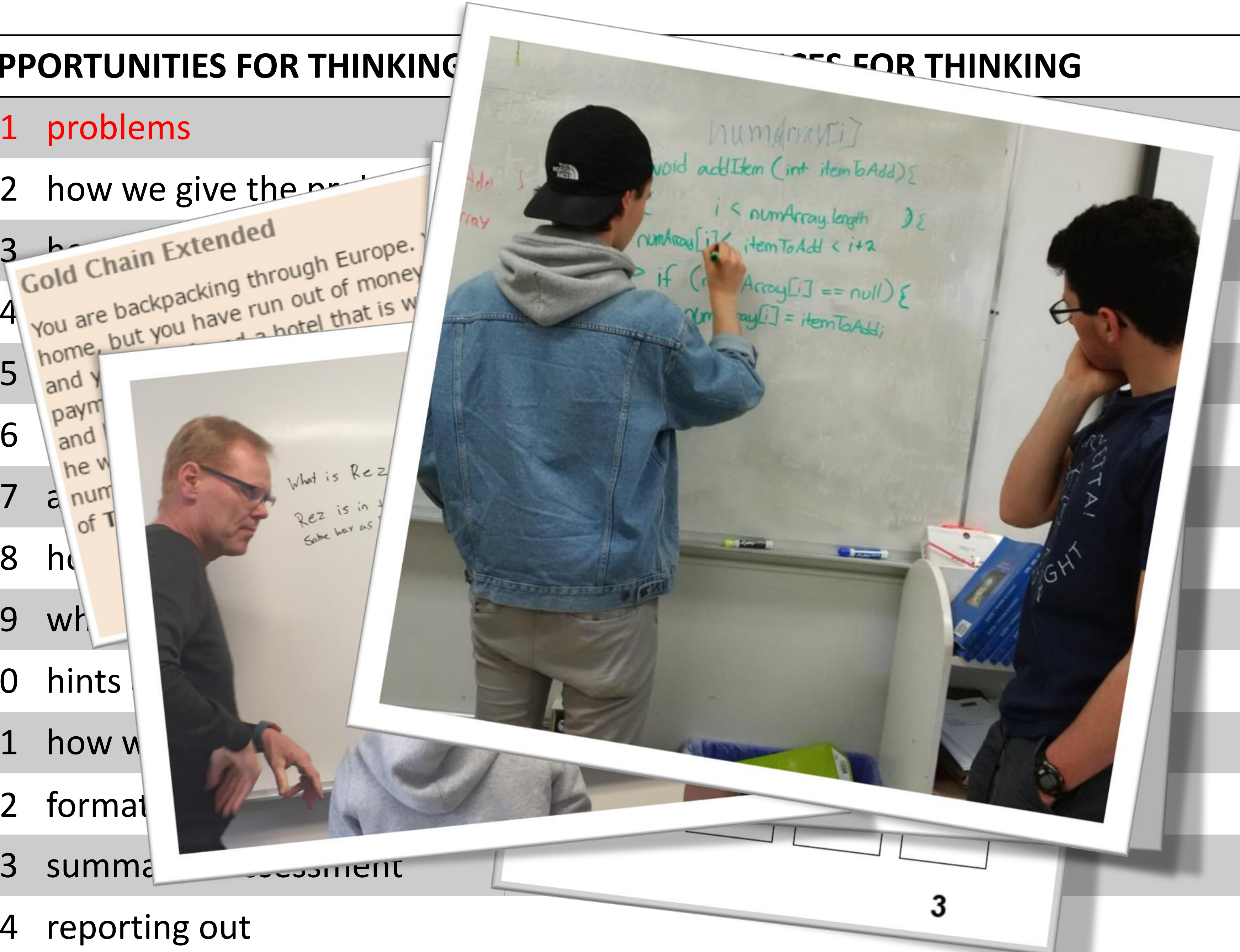
1	problems	
2	how we give the problem	
3	how we answer questions	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	
2	how we give the problem	
3	how we answer questions	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	
2	how we give the problem	
3	how we answer questions	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

OPPORTUNITIES FOR THINKING ... SES FOR THINKING

1 problems
2 how we give the pr
3 h
4
5
6
7 a
8 h
9 wh
10 hints
11 how w
12 format
13 summa ssessment
14 reporting out

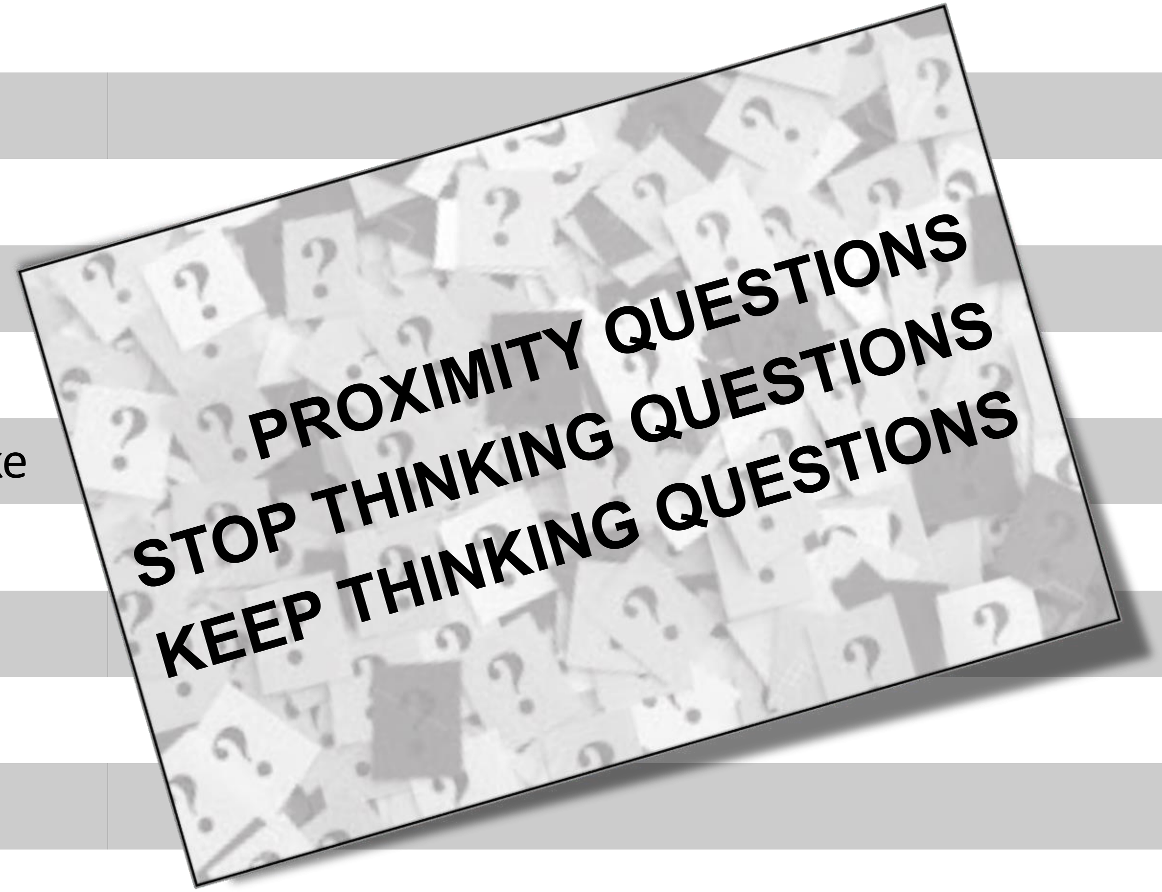


	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	
3	how we answer questio	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

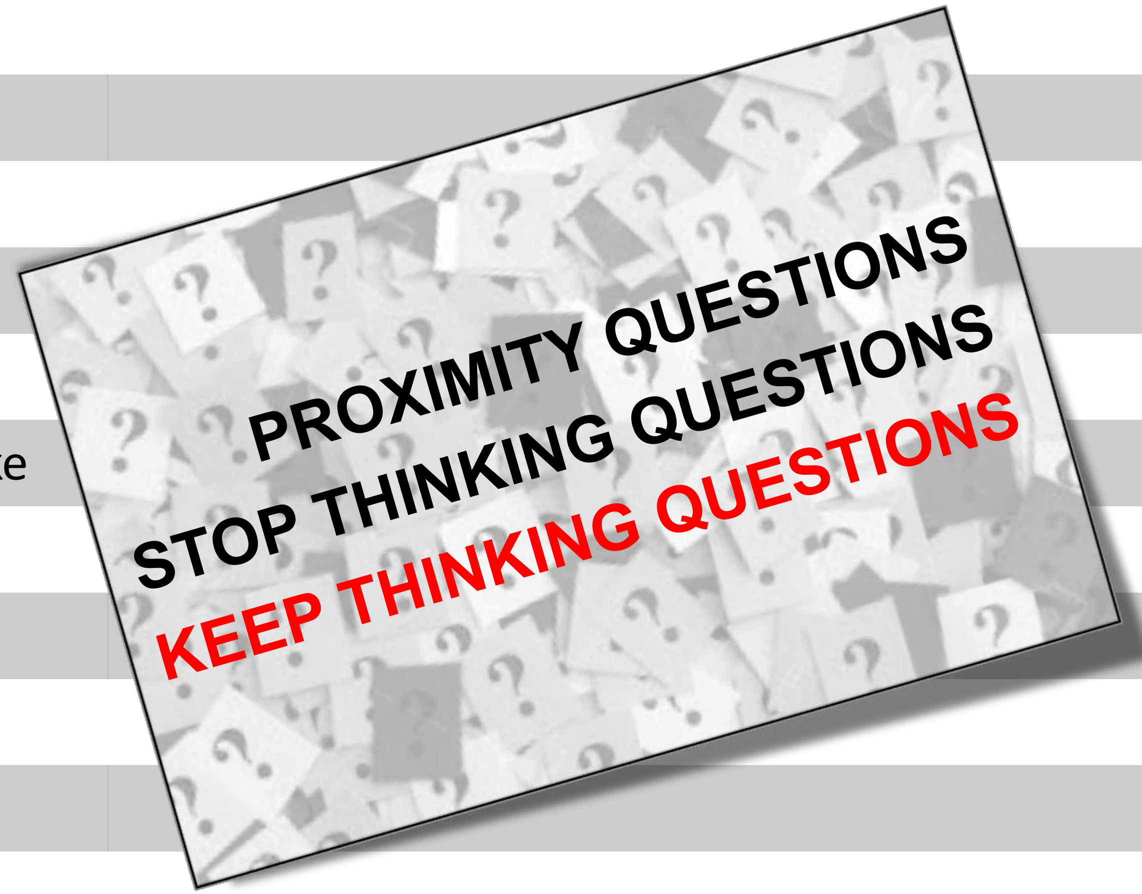
verbal instructions
post on board/screen
handout to the group
handout to the student
textbook

	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	



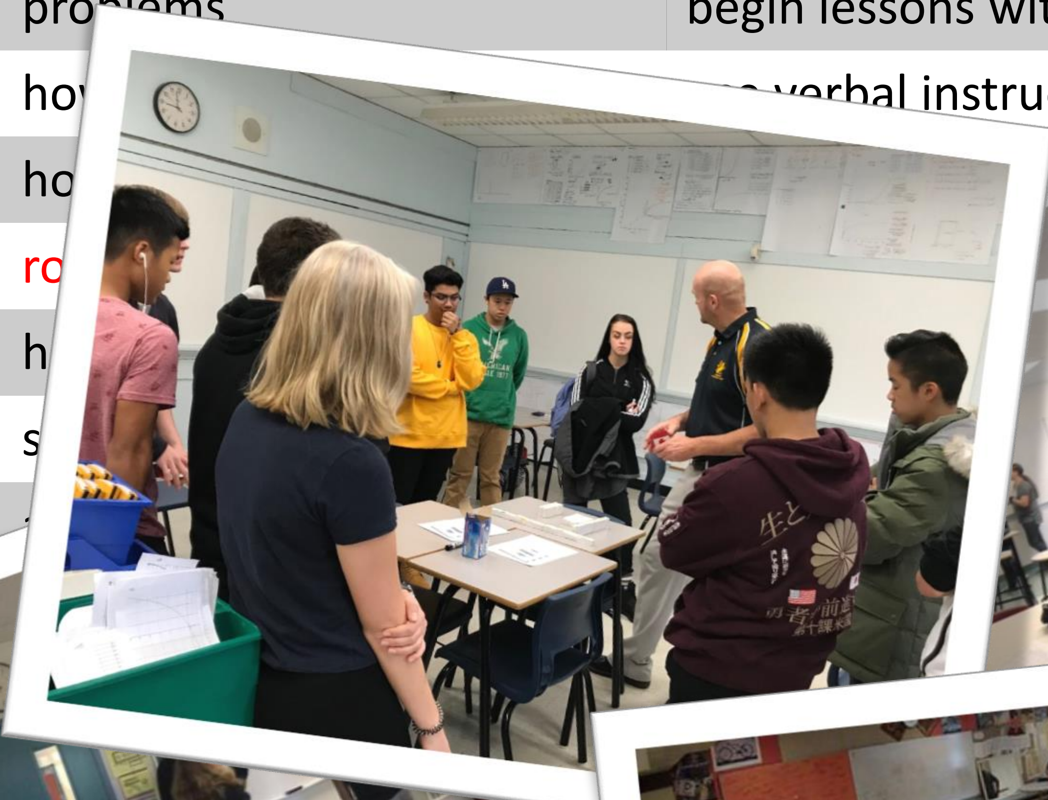
	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	



	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	answer only *keep thinking questions*
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

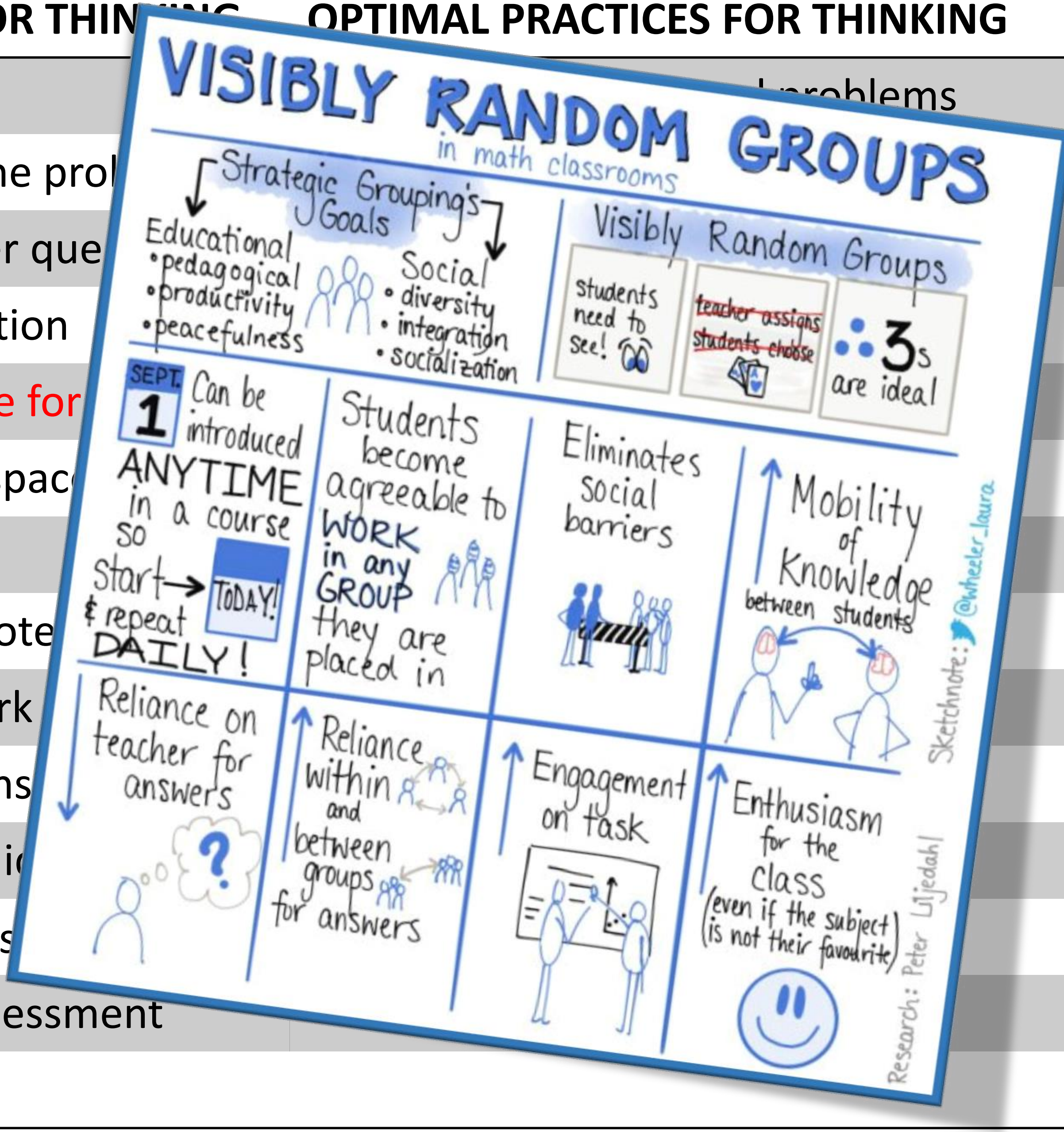
	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	answer only *keep thinking questions*
4	room organization	
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

OPPORTUNITIES FOR THINKING		OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	ho	...e verbal instructions
3	ho	
4	ro	
5	h	
6	s	
7		
11		
12	...nt	
13	...ve assessment	
14	reporting out	



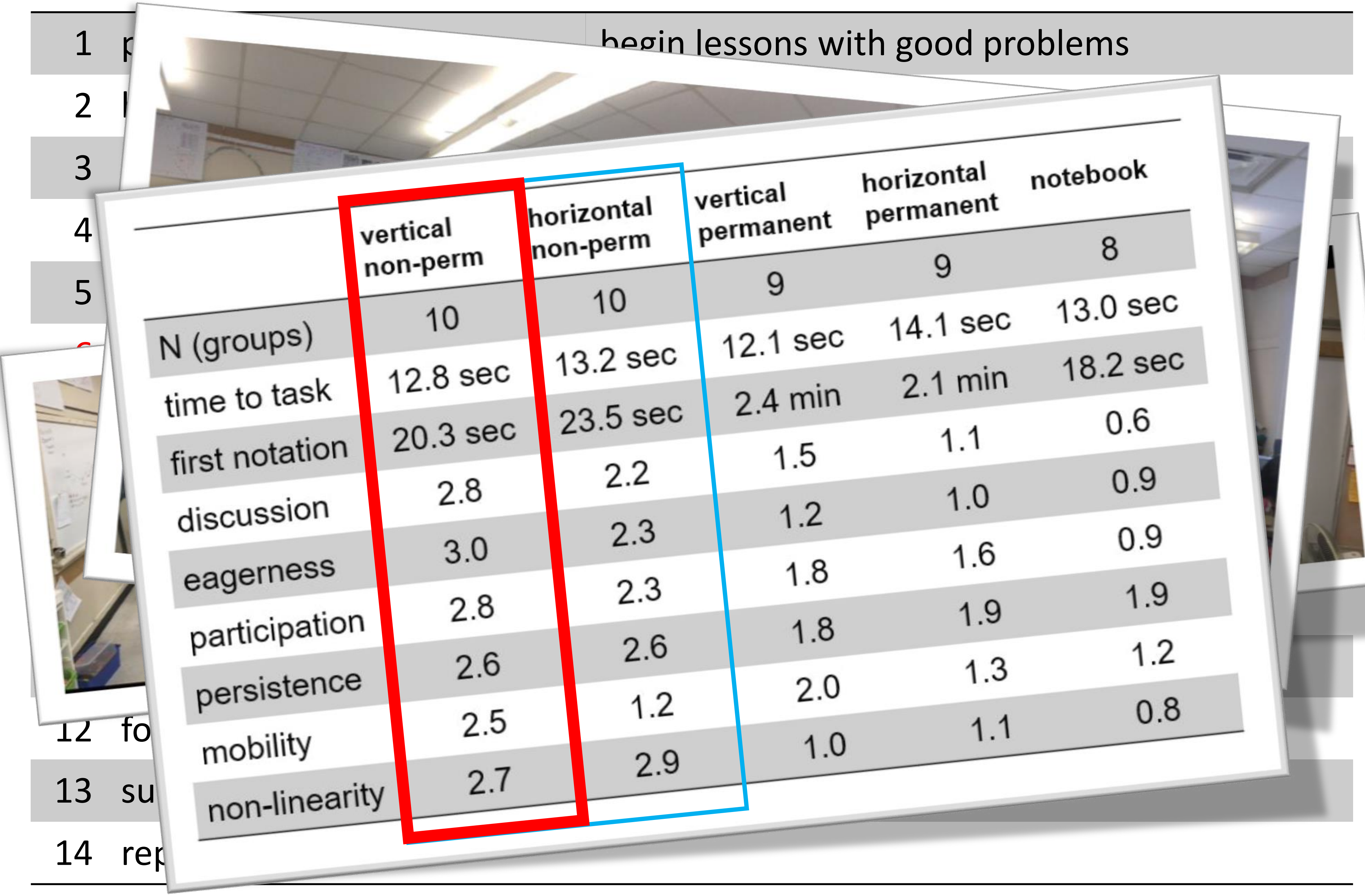
	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	answer only *keep thinking questions*
4	room organization	*defront* the classroom
5	how groups are formed	
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

	OPPORTUNITIES FOR THIN	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	problems
2	how we give the prol	
3	how we answer que	
4	room organization	
5	how groups are for	
6	student work spac	
7	autonomy	
8	how we give note	
9	what homework	
10	hints and extens	
11	how we consoli	
12	formative asses	
13	summative assessment	
14	reporting out	



	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	problems	begin lessons with good problems
2	how we give the problem	use verbal instructions
3	how we answer questions	answer only *keep thinking questions*
4	room organization	*defront* the classroom
5	how groups are formed	form visibly random groups
6	student work space	
7	autonomy	
8	how we give notes	
9	what homework looks like	
10	hints and extensions	
11	how we consolidate	
12	formative assessment	
13	summative assessment	
14	reporting out	

	OPPORTUNITIES FOR THINKING	OPTIMAL PRACTICES FOR THINKING
1	p	begin lessons with good problems
2	l	
3		
4		
5		
12	fo	
13	su	
14	rep	



	vertical non-perm	horizontal non-perm	vertical permanent	horizontal permanent	notebook
N (groups)	10	10	9	9	8
time to task	12.8 sec	13.2 sec	12.1 sec	14.1 sec	13.0 sec
first notation	20.3 sec	23.5 sec	2.4 min	2.1 min	18.2 sec
discussion	2.8	2.2	1.5	1.1	0.6
eagerness	3.0	2.3	1.2	1.0	0.9
participation	2.8	2.3	1.8	1.6	0.9
persistence	2.6	2.6	1.8	1.9	1.9
mobility	2.5	1.2	2.0	1.3	1.2
non-linearity	2.7	2.9	1.0	1.1	0.8

Lo spazio è un maestro invisibile

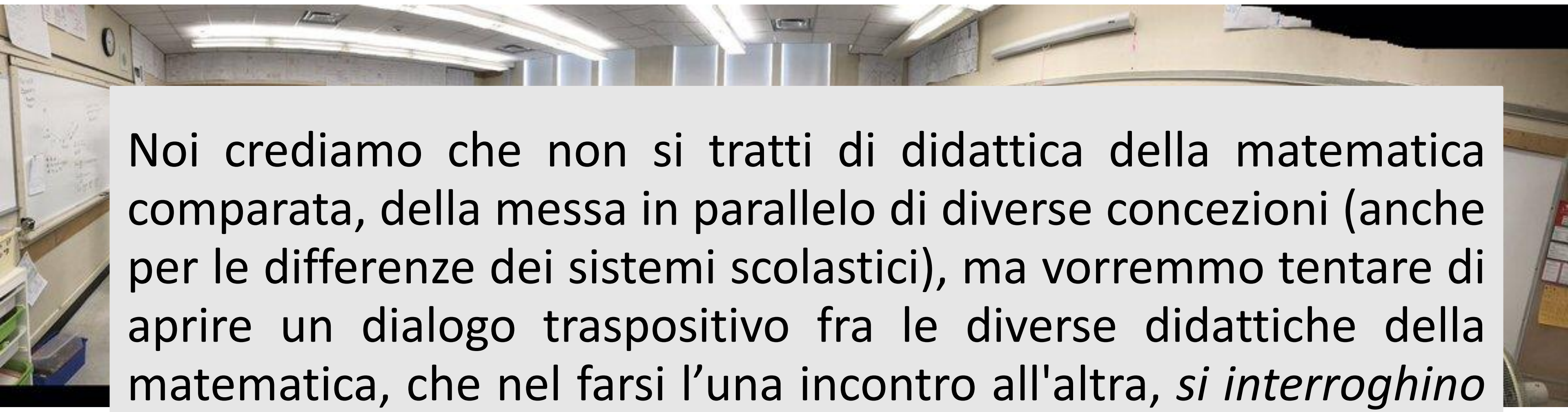
THANK YOU!

La più temuta banda di pirati dello spazio, quella con a capo Nathaniel Flint, sta per sciogliersi. Hanno diviso tutto il loro oro, ma rimane un unico, preziosissimo Cristallo Solare Arturiano che è molto ambito.

Per decidere chi avrà il cristallo il capitano Nathaniel Flint mette i suoi 7 pirati in un cerchio. Quindi punta a una persona per iniziare. Questa persona esce dal cerchio, prende il suo oro e se ne va. La persona alla sua sinistra rimane nel cerchio, ma la persona successiva esce. Questo metodo di esclusione continua per ogni pirata che esce finché non ne rimane uno solo a cui andrà il cristallo. A chi deve puntare il capitano se vuole assicurarsi di riuscire ad avere lui il cristallo? E se ci fossero 9 pirati? E se ci fossero 10 pirati e se ci fossero 27 pirati? Eccetera.

Fare didattica in spazi flessibili: intervista a Franco Lorenzoni

Trasposizione Culturale (TC)



Noi crediamo che non si tratti di didattica della matematica comparata, della messa in parallelo di diverse concezioni (anche per le differenze dei sistemi scolastici), ma vorremmo tentare di aprire un dialogo traspositivo fra le diverse didattiche della matematica, che nel farsi l'una incontro all'altra, *si interroghino sul proprio impensato*.