Misura in aula del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo

28 febbraio Aula 1

Fisica per Tecnologie Alimentari,
Dipartimento di Agraria, Universita' di Napoli Federico II

1 Introduzione

Circa una settantina di studenti del corso di Fisica del primo anno di Tecnologie Alimentari hanno partecipato in aula a due misure dei periodi di pendoli di lunghezze di circa un metro e circa mezzo metro, utilizzando cronometri personali, orologi e cellulari, nel primo giorno di lezione del corso di Fisica. L'obiettivo era di introdurre immediatamente e in prima persona gli studenti all'idea che la Fisica e' una scienza sperimentale, attraverso la partecipazione attiva alla misura di una grandezza fisica, utilizzando strumenti tecnologici da loro usati nella vita di tutti i giorni. Il pendolo era semplicemente un oggetto attaccato con un filo di spago ad un supporto fisso e posto davanti alla cattedra, in maniera che fosse visibile a tutti.

Si potrebbe obbiettare che sarebbe stato piu' corretto far fare cinquanta misure ripetute ad un singolo studente, in modo che lo studente con il suo cellulare formasse *uno stesso apparato di misura.* Sicuramente ci saremmo annoiati molto di piu' e quindi non sarebbe stato il caso di fare una cosa del genere in classe. D'altra parte mettere insieme misure contamporanee, fatte da studenti diversi, si puo' giustificare facendo l'ipotesi che gli studenti formino un gruppo omogeneo (ad esempio, avendo un' simile, la loro vista ed i loro tempi di reazione dovrebbero essere del tutto simili). Se questo invece non fosse vero, e quindi non formassero un gruppo omogeneo, ce ne potremmo accorgere nella stessa analisi della distribuzione delle misure.

2 I dati

Per migliorare la precisione delle misure, si e' misurato un intervallo di tempo pari a dieci oscillazioni complete, dividendo poi per dieci il valore ottenuto. In questo modo la precisione e' aumentata di un fattore dieci, poiche' si sono potuti apprezzare valori di intervalli di tempi dieci volte piu' piccoli. L'ipotesi implicita dell'isocronismo del pendolo, che cioe' ogni oscillazione delle dieci osservate sia avvenuta in uno stesso lasso di tempo, non e' stata accennata al momento della misura, ma verra' discussa piu' avanti nel corso degli studi. Uno studente pero' ha notato che avremmo dovuto fare partire il pendolo con uno stesso angolo iniziale. La discussione su queste ipotesi piu' o meno implicite e' demendata a quando si studiera' la dinamica del pendolo piu' avanti nel corso.

Quando la lunghezza del pendolo era di circa 1.0m i risultati di 63 misure del tempo, impiegato dal pendolo a compiere dieci oscillazioni complete sono stati i seguent (in secondi)i:

19.41, 19.63, 19.72, 19.54, 19.66, 19.64, 19.80, 19.41, 19.37, 19.41, 18.68, 19.42, 19.64, 19.30, 19.79, 19.065, 19.42, 19.71, 18.82, 19.74, 19.22, 19.64, 19.08, 19.7, 19.66, 19.18, 19.22, 18.64, 19.52, 19.72, 19.61, 19.79, 19.55, 19.30, 19.72, 19.45, 19.65, 19.26, 20.66, 19.21, 20.08, 19.48, 19.13, 19.64, 19.42, 19.69, 20.01, 19.99, 20.13, 19.84, 19.13, 18.67, 19.80, 20.16, 19.57, 20.28, 19.10, 20.14, 20.20, 19.71, 19.80, 19.50, 19.28.

Si e' usata la notazione anglosassone che divide gli interi dai decimali tramite punto e non tramite virgola. Le virgole separano i diversi valori delle misure, ognuna effettuata da un singolo studente. Dividendo ogni valore per dieci si ottiene l'insieme di valori, in secondi, ottenuti da ogni studente del periodo di oscillazione del pendolo.

1.941, 1.963, 1.972, 1.954, 1.966, 1.964, 1.98, 1.941, 1.937, 1.941, 1.868, 1.942, 1.964, 1.93, 1.979, 1.9065, 1.942, 1.971, 1.882, 1.974, 1.922, 1.964, 1.908, 1.97, 1.966, 1.918, 1.922, 1.864, 1.952, 1.972, 1.961, 1.979, 1.955, 1.93, 1.972, 1.945, 1.965, 1.926, 2.066, 1.921, 2.008, 1.948, 1.913, 1.964, 1.942, 1.969, 2.001, 1.999, 2.013, 1.984, 1.913, 1.867, 1.98, 2.016, 1.957, 2.028, 1.91, 2.014, 2.02, 1.971, 1.98, 1.95, 1.928

Si vede subito che le singole misure differiscono tra loro, distribuendosi all'interno di un intervallo di valori che va' dal valore piu' piccolo, $1.864\,s$ al valore piu' grande pari a $2.066\,s$. Questo ampio spettro di valori, contrasta con il numero di cifre, tipicamente quattro, con cui sono state scritte le singole misure.

Consideriamo uno dei dati, ad esempio il primo valore nella lista, $t_1 = 1.941\,s$; se dovessimo dare credito solo a questa singola misura, dovremmo pensare che il periodo del pendolo sarebbe $T = t_1 = 1.941\,s$, determinato quindi fino al millesimo di secondo ! Ma, a meno che non abbiamo qualche argomento valido per selezionare t_1 come l'unica misura affidabile tre le cinquanta effettuate, risulta evidente che questa singola misura non puo' stimare il vero valore del periodo con la precisione di un millisecondo. Quindi, se invece pensiamo che ogni valore misurato e' da considerarsi sullo stesso piano degli altri, il numero di cifre con cui e' stata scritto t_1, cinque, e' sicuramente eccessivo, visto t_1 differisce da altre misure dell'insieme per decimi di secondo se non in qualche caso addirittura di circa un secondo. La stessa cosa puo' dirsi ovviamente per qualunque altra singola misura dell'insieme.

Il problema dell'analisi dei dati consiste proprio nell' estrarre dalla distribuzione delle singole misure una stima efficace sia del valore reale della grandezza fisica che si sta' misurando, sia dell'errore da associare a questa stima.

3 Parametri Statistici

Dalla successione dei singoli valori e' difficile farsi un' idea di come questi dati sono distribuiti. E' utile riportarli in un grafico. Il grafico riportato nella Figura 1 ha sulle ascisse l'indice n che va' da 1 a 63 ed etichetta la singola misura e sulle ordinate il valore della misura del periodo corrispondente. L'ordine dei dati e' irrilevante, poiche' dipende dal fatto che gli studenti, uno alla volta, hanno riportato i loro valori su un foglio che si sono passati tra loro.

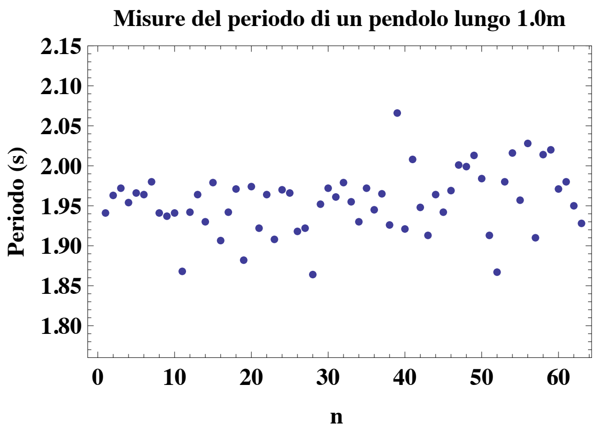

Figura 1: Rappresentazione grafica delle singole misure del periodo di oscillazione del pendolo.

Osservando il grafico, appare evidente che l'insieme delle singole misure non si distribuisce in modo casuale. Il compito dell'analisi statistica e' di introdurre un'insieme ristretto di parametri che descriva in maniera quantitativa le informazioni contenute nella distribuzione dei dati.

3.1 Valor medio

Dalla Figura 1, la prima caratteristica che salta agli occhi e' che i dati si distribuiscono attorno ad un valore intermedio. Questo ci porta ad introdurre il **valore medio** $\bar{t}$ definito come la media aritmetica dei singoli dati:

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_N}{N} = \frac{\sum_{n=1}^{N} t_n}{N}$$

dove N e' il numero di dati e nel nostro caso $N = 63$. Nel grafico in Figura 2, insieme alle singole misure, e' disegnata la retta orizzontale corrisponde al valor medio, il cui valore numerico è

$$\bar{t} = 1.95509.$$

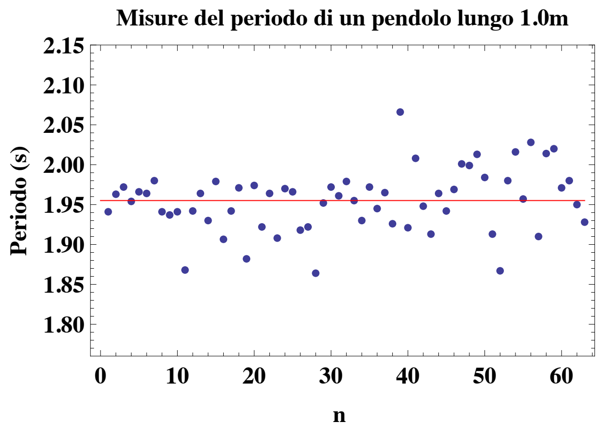

Figura 2: Distribuzione dei dati e retta orizzontale corrispondente al valor medio $\bar{t} = 1.95509\,s$.

Il valor medio $\bar{t}$ e' un importante parametro statistico. Tutti i dati si distribuiscono in maniera bilanciata da entrambi i lati attorno al valor medio. Tuttavia $\bar{t}$ da solo non basta a descrivere altri aspetti essenziali della distribuzione delle singole misure.

Inoltre, sebbene sia il perfetto candidato ad essere scelto come stima del valore reale della grandezza fisica che stiamo misurando (nel nostro caso, il periodo del pendolo), abbiamo bisogno di darne anche una stima dell'errore, altrimenti non sapremmo quante delle cifre che abbiamo ottenuto dalla media aritmetica sono effettivamente significative.

3.2 Dispersione dei dati

Il valor medio non ci da' informazione sulla dispersione dei dati. Abbiamo bisogno di un altro parametro statistico, che ce ne dia un'informazione quantitativa.

Un parametro possibile potrebbe essere la larghezza dell'intervallo in cui sono compresi tutti i dati (in inglese, **range**), ossia la differenza tra il valore massimo e quello minimo. Questi due valori estremi, abbiamo gia visto che sono $t_{min} = 1.864\,s$ e $t_{max} = 2.066$. Il range R, nel caso della misura del periodo del pendolo, sarebbe:

$$R = t_{max} - t_{min} = 0.202\,s$$

Tuttavia, il *range* dipende esclusivamente dai due valori estremi ed ignora completamente la distribuzione della maggior parte dei dati. Abbiamo bisogno di un parametro che descriva in modo piu' completo come i dati si distribuiscono.

Per costruire questo nuovo parametro abbiamo bisogno del valor medio $\bar{t}$, che abbiamo gia' calcolato come media aritmetica dei dati.

Consideriamo uno dei dati, t_n della distribuzione. Lo scarto lineare dal valor medio e' la differenza tra il valore dell'ennesima misura t_n ed il valor medio:

$$t_n - \bar{t}$$

Lo scarto lineare e' positivo, se il valore di t_n e' maggiore di quello di $\bar{t}$, e questo avviene per tutti quei punti che nella Figura 2 sono al di sopra della retta orizzontale corrispondente al valor medio. Lo scarto lineare e' invece negativo se il valore di t_n e' minore di quello di $\bar{t}$, come occade per tutti quei punti che nella Figura 2 sono al di sotto della retta orizzontale corrispondente valor medio.

Si puo' vedere che, poiche' il valor medio e' definito come la media aritmetica dei singoli dati, la somma di tutti gli scarti lineari e' nulla

$$\begin{gathered}(t_1 - \bar{t}) + (t_2 - \bar{t}) + ... + (t_N - \bar{t}) = \\ \left(\sum_{n=1}^{N} t_n\right) - N\bar{t} = \\ N\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} t_n}{N} - \bar{t}\right) = 0.\end{gathered}$$

Questo spiega che la media aritmetica e' quel valore per il quale la somma degli scarti lineari positivi compensa esattamente la somma degli scarti lineari negativi.

Per avere una misura della dispersione dei dati attorno al valor medio, abbiamo bisogno di una quantita' a cui contribuiscano allo stesso modo sia i dati con valore superiore al valor medio, sia quelli inferiori ad esso.

Si definisce **deviazione standard** la radice quadrata della media degli scarti quadratici, ovvero

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + ... + (t_N - \bar{t})^2}{N-1}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(t_n - \bar{t})^2}{N-1}}.\end{aligned}$$

I singoli termini nella somma sono tutti positivi poiche' sono i quadrati degli scarti lineari, $(t_n - \bar{t})^2$, e quindi nel calcolo della σ non conta se la singola misura sia piu' grande o piu' piccola del valor medio, ma solo di quanto ne differisca [1]. Notiamo anche che gli scarti quadratici avrebbero dimensioni di secondi al quadrato, ma la radice quadrata riporta le dimensioni della deviazione standard σ a quella delle singole misure e del valor medio, cioe' a essere espressa in secondi.

Per il nostro insieme di misure del periodo del pendolo, il valore numerico della deviazione standard risulta essere, 0.038992, che arrotonderemo a

$$\sigma = 0.039\,s.$$

3.3 Deviazione standard e distribuzione dei dati

Per capire meglio il significato della deviazione standard, possiamo dividere il grafico della distribuzione dei dati in Figura 1 in fasce orizzontali che corrispondono ad intervalli di ampiezza crescente. Come si vede la maggior parte dei dati e' contenuta nella fascia $\bar{t} \pm \sigma$, con circa l'88% delle misure. Allargando a $\bar{t} \pm 2\sigma$ si arriva al 94% dei dati e nella fascia $\bar{t} \pm 3\sigma$ si trova il 98% di tutte le misure.

In basi a considerazioni statistiche generali, ci si attende che in un'insieme sufficientemente grande di misure ripetute di una grandezza fisica, in presenza solo di errori casuali, una singola misura abbia una probabilità del $68,3\%$ di trovarsi nell'intervallo di $\pm\sigma$ attorno al valore medio calcolato, del $95,5\%$ di trovarsi nell'intervallo di $\pm 2\sigma$ e del $99,7\%$ di trovarsi nell'intervallo di $\pm 3\sigma$.

4 La stima dell' errore del valor medio

La precedente discussione ci ha mostrato come la deviazione standard descriva la probabilita' che una singola misura differisca dal valor medio calcolato $\bar{t}$. Tuttavia non e' σ che fornisce l'errore da associare

[1] Il fatto che nella formula di σ sotto la radice, a denominatore appaia $N-1$ e non N, come nella formula del valor medio $\bar{t}$, richiede ragionamenti piu' sofisticati di quelli qui esposti. Notiamo comunque che la differenza tra N ed $N-1$ diventa trascurabile appena il numero di misure e' abbastanza grande.

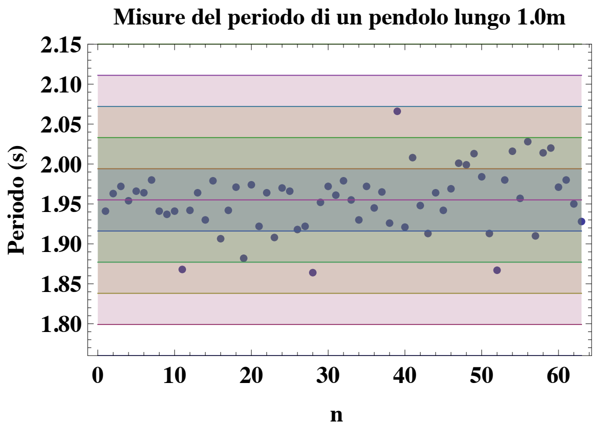

Figura 3: Rappresentazione grafica delle singole misure di oscillazione del pendolo, con fasce di ampiezza $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$, $\pm 4\sigma$, $\pm 5\sigma$, con $\sigma = 0.04\,s$, attorno al valor medio $\bar{t} = 1.95$.

alla stima del valore reale del periodo del pendolo espressa dal valor medio.

Rendersi conto di questo fatto richiederebbe un ragionamento piu' complesso, tuttavia possiamo dare almeno un'idea intuitiva del perche' dobbiamo assegnare alla nostra misura un'errore piu' piccolo di σ. Il motivo principale e' che il valor medio $\bar{t}$, che abbiamo ottenuto e che proponiamo come valore della misura, andra' a confrontarsi non con altre misure singole, ma con altri valori medi ottenuti da altri insiemi nuovi di misure ripetute. Se mettessimo in un grafico questi valori medi, ci dovremmo aspettare che essi si distribuiscano in maniera simile a quello delle singole misure in Figura 1, ma con una *dispersione minore*.

Inoltre, ci aspettiamo che valori medi ottenuti da un numero molto grande di dati siano affetti da un'errore piu' piccolo rispetto a quelli ottenuti da un numero minore di misure, e che quindi l'errore da associare al valor medio $\bar{t}$ dovrebbe decrescere all'aumentare del numero N di misure.

Tutte queste considerazioni possono essere rese piu' rigorose, ottenendo come risultato finale che alla nostra misura va' assegnato come errore non la deviazione standard σ, ma un valore piu' piccolo dato da

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

In quest'espressione si vede che effettivamente $\sigma_{\bar{t}}$ diminuisce all'aumentare di N.

Nel caso della misura del periodo delle oscillazioni del pendolo, si ottiene, con il numero di misure $N = 63$ e con $\sigma = 0.039\,s$ il valore $\sigma_{\bar{t}} = 0.0049\,s$. Di conseguenza anche per il valore di $\bar{t}$ effettueremo l'arrotondamento al millesimo di secondo, perche' non avrebbe senso inserire cifre successive, visto che stimiamo l'errore essere di millesimi di secondo. Alla fine presenteremo il risultato della misura come:

$$T = \bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}} = (1.955 \pm 0.005)s, \quad L = 1.0m)$$

corrispondente ad un' **errore relativo**

$$\frac{\Delta T}{T} = 0.0026,$$

ovvero un **errore percentuale**

$$\frac{\Delta T}{T} \times 100\% = 0.26\%.$$

Se le nostre misure non sono state affette da qualche errore sistematico, che abbiamo trascurato o che ci e' sfuggito completamente (per intenderci, per sbaglio tutte le misure potrebbero essere state effettuate contando sistematicamente nove oscillazioni del pendolo e pensando invece che fossero dieci), ci aspettiamo che facendo un'altro insieme di misure del periodo del pendolo, il nuovo valor medio che si otterrebbe differirebbe, con buona probabilita', al piu' di $\pm\sigma_{\bar{t}}$ dal valore che abbiamo ottenuto, mentre invece non ci aspettiamo che esso ne differisca per piu' di $\pm 3\sigma_{\bar{t}}$. Viceversa, se ci fosse una discrepanza superiore ai $3\sigma_{\bar{t}}$ tra i due valori medi, ottenuti dai due diversi insiemi di misure della stessa quantita' fisica e se le $\sigma_{\bar{t}}$ corrispondenti fossero simili, indicando che l'errore stimato dal secondo insieme di misure e' piu' o meno lo stesso di quello del primo insieme, dovremmo confrontare molto attentamente le due modalita' di misura, per comprendere come mai i due risultati appaiano essere statisticamente incompatibili.

5 Misura con lunghezza dimezzata e una *"possibile scoperta scientifica"*

Un secondo insieme di 68 misure e' stato ottenuto dopo aver accorciato la lunghezza del pendolo a 0.5 metri. Il risultato e' riportato nel grafico seguente. Con un'analisi analoga a quella svolta nel caso del pendolo di un metro di lunghezza, si ottiene:

$$T = \bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}} = (1.352 \pm 0.0045)s, \quad (L = 0,5m).$$

La domanda che ci poniamo adesso, avendo per ciascuna delle due lunghezze del pendolo i corrispondenti valori dei periodi di oscillazione, e' se vi sia qualche grandezza fisica che resta costante e che quindi sia caratteristica comune delle piccole oscillazioni del pendolo.

Non avendo sviluppato nessuna descrizione di questo sistema fisico, e' una ricerca un po' alla cieca. Cercheremo di vedere se c'e' qualche combinazione

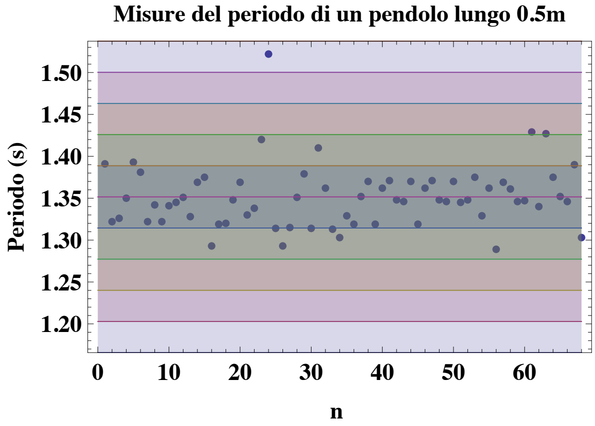

Figura 4: Rappresentazione grafica delle singole misure di oscillazione del pendolo, con fasce di ampiezza $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$, $\pm 4\sigma$, $\pm 5\sigma$, con $\sigma = 0.037\,s$, attorno al valor medio $\bar{t} = 1.289$.

algebrica di periodo e lunghezza che abbia lo stesso valore nelle due situazioni. Se questo succede, potremmo supporre che quella combinazione corrisponde ad una grandezza fisica che svolge qualche ruolo importante nel determinare il moto del pendolo. Inoltre, poiche' lunghezza ed periodo del pendolo son quantita' dimensionali, misurandosi l'una in metri e l'altro in secondi, una loro combinazione algebrica, il cui valore numerico fosse lo stesso nei due casi, avrebbe anch'essa unita' di misura ben definita.

Proviamo con il rapporto tra lunghezza e periodo del pendolo, che ha evidentemente le unita' di misura di una velocita' ovvero metri/secondi. I valori ottenuti nei due casi

$$\frac{1.0m}{1.955s} = 0.51\frac{m}{s}, \quad \frac{0.5m}{1.352s} = 0.37\frac{m}{s}$$

sono decisamente diversi. (Notare che abbiamo messo il risultato con lo stesso numero di cifre significative della quantita' che ne ha di meno, nel nostro caso la lunghezza).

Proviamo con il prodotto tra lunghezza e periodo, che ha evidentemente le unita' di misura metri$\times$secondi. Questa e' un unita' di misura non molto comune. Sicuramente non e' quella di grandezze introdotte nello studio del moto. Tuttavia esistono fenomeni una in cui quantita' fisiche con dimensioni di spazio$\times$tempo possono avere significato. Si pensi, ad esempio, al consumo di carburante di un veicolo in moto, che e' proporzionale alla distanza percorsa (in metri), ma anche al tempo in cui il motore e' in funzione (in secondi), poiche' se acceso consuma carburante anche quando e' fermo. Il numero misurato da un tassametro ha le stesse dimensioni. I valori ottenuti dalle misure nei due casi di lunghezza pari a 1.0m e a 0.5m sono:

$$1.0m \times 1.955s = 1.95m{\cdot}s, \quad 0.5m \times 1.352s = 0.68m{\cdot}s$$

sono ancora piu' diversi, che nel tentativo precedente.

Proviamo con il rapporto tra la lunghezza ed il quadrato del periodo di oscillazione, che avendo come unita' di misura metri/secondi^2 ha le dieansioni di un'accelerazione. Si ottiene

$$\frac{1.0m}{(1.955s)^2} = 0.26\frac{m}{s}, \quad \frac{0.5m}{(1.352s)^2} = 0.27\frac{m}{s^2}.$$

I due valori differscono tra loro di meno del 4% !

Abbiamo quindi un'ipotesi di lavoro. C'e' un'accelerazione costante pari a circa

$$\frac{L}{T^2} = 0.26\frac{m}{s^2}.$$

che fissa il rapporto tra lunghezza del pendolo e periodo delle (piccole) oscillazioni.

Piu' avanti nel corso vedremo che la relazione tra periodo e lunghezza del pendolo e' data da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

dove

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

e' l'accelerazione costante con cui cadono tutte le masse sulla superficie terrestre.

Se dalla (1) ricaviamo g in termini di l e T otteniamo

$$g = 4\pi^2\frac{L}{T^2}$$

Se al rapporto L/T^2 sostituiamo il valore $0.265\frac{m}{s^2}$, che abbiamo ottenuto dalla nostra semplice indagine, otteniamo la nostra determinazione sperimentale del valore di g:

$$g_{exp} = 4 \times (3.14)^2 \times 0.26\frac{m}{s^2} = 10.3\frac{m}{s^2}$$

Tenendo conto che le lunghezze sono state misurate con un'errore abbastanza grande, l'accordo e' decisamente buono, con il nostro valore che differisce da quello reale di meno del 5%.