RIENTAGRARIA
Precorsi 2019

Matematica

Equazioni e disequazioni di I e II grado

Indice lezione

- Equazioni di I e II grado
- Disequazioni di I e II grado

Equazioni

In matematica, un'*equazione* (dal latino *equo*, rendere uguale) è una uguaglianza tra due espressioni algebriche, contenenti una o più incognite, verificata solo per determinati valori attribuiti alle incognite.

Risolvere un'equazione vuol dire cercare il valore incognito, o i valori incogniti, per il quale le due espressioni algebriche forniscono lo stesso risultato.

Equazioni

Un insieme di valori che, sostituiti alle incognite, rende vera un'equazione è chiamato insieme delle *soluzioni* o *radici*.

Risolvere un'equazione significa quindi esplicitare l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

Equazioni

Esempio.

Risolvere l'equazione

$$5x + 3 = 2x + 4$$

significa trovare il valore di x per cui

il primo membro $5x + 3$ e il secondo membro $2x + 4$

hanno lo stesso valore

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle soluzioni di un'equazione non cambia se:

- Si aggiunge a entrambi i membri dell'equazione la stessa quantità (numero o incognita);

come conseguenza: si può portare un addendo da un membro all'altro, pur di cambiargli il segno e si possono eliminare due addendi uguali che compaiono in entrambi i membri.

- Si moltiplicano entrambi i membri dell'equazione per lo stesso numero diverso da 0;

come conseguenza: si possono cambiare di segno entrambi i membri di un'equazione (non uno solo, entrambi!).

Equazioni algebriche di I grado

- Un'equazione algebrica di *primo grado* o *lineare* è un'equazione in cui il grado massimo dell'incognita è *uno* e, dopo una serie opportuna di semplificazioni, si può scrivere nella cosiddetta *forma normale*:

$$ax + b = 0$$

per due numeri reali $a \neq 0$ e b.

Portando al secondo membro b e dividendo per $a \neq 0$ si ottiene la soluzione:

$$x = -\frac{b}{a}$$

UNICA SOLUZIONE!

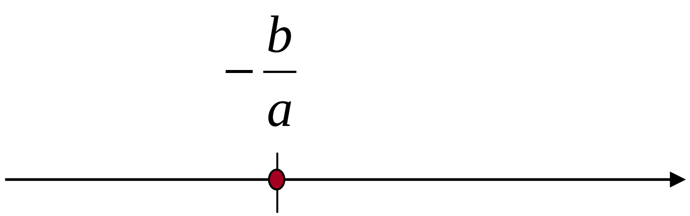
Equazioni algebriche di I grado

Quindi, un'equazione algebrica di *primo grado* o *lineare*

$$ax + b = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ e } b \text{ numeri reali}$$

ammette sempre un'unica soluzione: $x = -\dfrac{b}{a}$

Tale soluzione è rappresentata sull'asse reale dall'unico punto $-b/a$



Equazioni algebriche di I grado

Data un'equazione algebrica di primo grado

$$ax + b = 0,$$ con a e b numeri reali

Se $a = 0$, si possono distinguere due casi:

- $0 \cdot x + b = 0$ con $b \neq 0$ equazione impossibile
- $0 \cdot x + b = 0$ con $b = 0$ equazione indeterminata

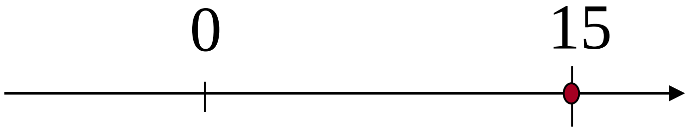
Esercizio 1. Risolvere la seguente equazione:

$$x+6=21$$

Sommando ad entrambi i membri il numero -6, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$x+\cancel{6}-\cancel{6}=21-6$$

$$\boxed{\Rightarrow x=15 \quad \text{è la soluzione}}$$



Equazioni algebriche di I grado

Esercizio 2. Risolvere la seguente equazione:

$$4x-3=-9$$

Sommando ad entrambi i membri il numero 3, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$4x\cancel{-3}\cancel{+3}=-9+3 \quad \Rightarrow 4x=-6$$

Dividendo entrambi i membri per il numero 4, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$\Rightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{-6}{4} \quad \boxed{\Rightarrow x=-\frac{6}{4} \quad \text{è la soluzione}}$$

Esercizio 3. Risolvere la seguente equazione:

$$2x-7=x-3$$

Sommando rispettivamente ad entrambi i membri -2x e 7, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$2x-x\cancel{-7}\cancel{+7}=\cancel{x}\cancel{-x}-3+7$$

$$\boxed{\Rightarrow x=+4 \quad \text{è la soluzione}}$$

Equazioni algebriche di I grado

Esercizio 4. Risolvere la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - x + 2 = x^2$$

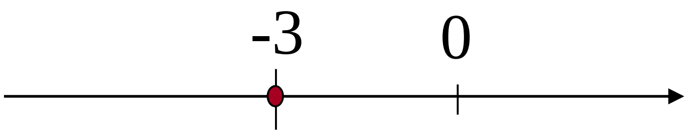
Sviluppando il quadrato di binomio al I membro, si ha che:

$$x^2 + 2x + 1 - x + 2 = x^2$$

Sommando $-x^2$ e -3 ad entrambi i membri l'equazione diventa:

$$2x \cancel{+1} - x \cancel{+2} \cancel{-3} = -3$$

$$\boxed{\Rightarrow x = -3 \quad \text{è la soluzione}}$$



Equazioni algebriche di II grado

In matematica, un'*equazione algebrica di secondo grado* o *quadratica* è un'equazione algebrica ad una sola incognita x che compare con grado massimo pari a 2, e la cui espressione è riconducibile alla *forma normale*:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a \neq 0, a, b, c \in R$$

Esempio

L'equazione $3x^2 + 2x - 5 = 0$ è un'equazione algebrica di II grado scritta in forma normale con

$$a = 3,\ b = 2, c = -5$$

Equazioni algebriche di II grado

Nel campo reale le equazioni algebriche di secondo grado possono ammettere due soluzioni, eventualmente coincidenti, oppure nessuna soluzione

Le soluzioni, se esistono, rendono verificata l'equazione quando vengono sostituite in essa.

Esempio

$\boldsymbol{x = 1}$ e $\boldsymbol{x = 2}$

sono soluzioni per l'equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

(infatti $1-3+2=0$ e $4-6+2=0$)

Equazioni algebriche di II grado – Discriminante

Si chiama *discriminante* di una equazione di II grado,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e si indica con il simbolo Δ, il numero

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Esempio:

Il discriminante dell’equazione $3x^2 + 2x - 5 = 0$ è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(3)(-5) = \ 4 + 60 = 64$$

Equazioni algebriche di II grado

Contrariamente ad una equazione di primo grado che ammette <u>sempre</u> un'unica soluzione, un'equazione di secondo grado può non ammettere soluzioni reali o ammetterne due (eventualmente coincidenti).

La presenza o meno di soluzioni reali dipende dal segno del discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Equazioni algebriche di II grado - Formula

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

  l'equazione ammette 2 soluzioni reali distinte

- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

  l'equazione ammette 2 soluzioni reali coincidenti

- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

  l'equazione non ammette soluzioni reali

Equazioni algebriche di II grado - Formula

Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ le due soluzioni di un'equazione di II grado si ricavano applicando formula

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Equazioni algebriche di II grado - Formula

Osservazione

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

  l'equazione ammette 2 soluzioni reali distinte x_1 e x_2
  e vale l'uguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

  l'equazione ammette 2 soluzioni reali coincidenti x_0
  e vale l'uguaglianza

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione

$$x^2 + x - 2 = 0$$

<u>*Soluzione*</u>. Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora dobbiamo determinarle

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-4}{2} = -2 \\[2ex] x_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

Equazioni algebriche di II grado

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

<u>*Soluzione*</u>. Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora dobbiamo determinarle

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{array} \right.$$

Esercizio 7. Risolvere la seguente equazione

$$-2x^2+x+1=0$$

Soluzione. Prima di calcolare il discriminante, cambiamo il segno a tutti i termini dell'equazione ottenendo così l'equazione equivalente: $2x^2-x-1=0$

Poi: $\Delta=1+8=9>0$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora dobbiamo determinarle

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2} \\ x_2=1 \end{cases}$$

Esercizio 8. Risolvere la seguente equazione

$$2(x+1)-(4-2x)=x^2+3$$

Soluzione. Riduciamo l'equazione in forma normale

$$2x+2-4+2x=x^2+3 \quad \Rightarrow -x^2+4x-5=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2-4x+5=0}$$

Calcoliamo ora il discriminante:

$$\Delta=16-20=-4<0$$

Quindi, l'equazione ammette non ammette soluzioni reali

Esercizio 9. Risolvere la seguente equazione

$$x^2 + 4 = 0$$

Soluzione. Si tratta di una equazione incompleta che può essere risolta come segue:

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$$

Sicuramente possiamo affermare che non esiste alcun numero reale x che al quadrato è uguale ad un numero negativo.

Quindi, l'equazione NON ammette due soluzioni reali

Osservazione.

Le equazioni algebriche incomplete possono comunque essere risolte sempre anche applicando la formula che richiede il calcolo del discriminante .

Applicando la formula risolutiva col calcolo del discriminante nell’esercizio precedente, avremmo trovato un discriminante negativo.

Esercizio 10. Risolvere la seguente equazione

$$x\left(x^2-3x\right)+2=x^3$$

Soluzione. Riduciamo l'equazione in forma normale:

$$\cancel{x^3}-3x^2+2=\cancel{x^3}\Rightarrow -3x^2+2=0\Rightarrow \boxed{3x^2-2=0}$$

Si tratta di una equazione incompleta che può essere risolta come segue:

$$x^2=\frac{2}{3}\Rightarrow\ x_{1,2}=\left\langle \begin{array}{l}\sqrt{\frac{2}{3}}\\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte.

Equazioni algebriche di II grado

Esercizio 11. Risolvere la seguente equazione

$$(x+1)^3+\frac{(x-1)(2-x)}{2}=(x^2-1)x$$

<u>*Soluzione*</u>. Riduciamo l'equazione in forma normale:

$$x^3+3x^2+3x+1+\frac{2x-x^2-2+x}{2}=x^3-x\Rightarrow$$

$$\cancel{2x^3}+6x^2+6x+\cancel{2}+2x-x^2-\cancel{2}+x=\cancel{2x^3}-2x\Rightarrow$$

$$5x^2+11x=0$$

Si tratta di una equazione incompleta che può essere risolta come segue:

Equazioni algebriche di II grado

$$5x^2 + 11x = 0$$

Mettiamo in evidenza la variabile x:

$$x(5x + 11) = 0 \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = -\frac{11}{5}$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte.

Disequazioni

In matematica, una disequazione è una relazione di disuguaglianza tra due espressioni che contengono delle incognite.

Risolvere una disequazione significa trovare quell'insieme di valori che, attribuiti alle incognite, rendono la disuguaglianza effettivamente verificata. Solitamente, le soluzioni di una disequazione sono costituite da uno o più insiemi numerici

(detti *intervalli*).

Disequazioni

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle soluzioni di una disequazione non cambia se:

- si aggiunge ai due membri di una disequazione una quantità (numero o incognita).

come conseguenza: si può eliminare da entrambi i membri uno stesso termine oppure spostarlo da un membro all'altro cambiando il segno

- si moltiplicano o dividono i due membri di una disequazione per una stessa quantità, a patto di cambiare il verso della disequazione nel caso in cui tale quantità sia negativa.

come conseguenza: si può cambiare il segno a tutti i termini di entrambi i membri, purché si cambi anche il verso della disequazione

Disequazioni algebriche

Osservazione

Le disequazioni algebriche di grado n, con $n \in N$, nell'incognita x

$$p(x) > 0 \quad \text{e} \quad -p(x) < 0$$

sono equivalenti.

Cambiando il segno a tutti i coefficienti del polinomio $p(x)$ e invertendo il verso della disequazione, ci si riconduce ad una disequazione equivalente alla data

Esempio

Data la disequazione algebrica di grado **4** con incognita x

$$-5x^4+3x^3-x^2-2x+1\leq 0$$

notiamo che, a patto di cambiare il segno a tutti i coefficienti del polinomio al primo membro e invertire il verso della disequazione, ci si può sempre ricondurre alla disequazione equivalente:

$$5x^4-3x^3+x^2+2x-1\geq 0$$

Disequazioni algebriche di I grado

- Una *disequazione* è di *primo grado* o *lineare* se, dopo una serie di opportune semplificazioni, si può scrivere nella forma:

$$ax + b \geq 0 \qquad (\text{oppure} > 0, \leq 0, < 0)$$

per due numeri reali $a \neq 0$ e b.

Ricordando che le due disequazioni di I grado

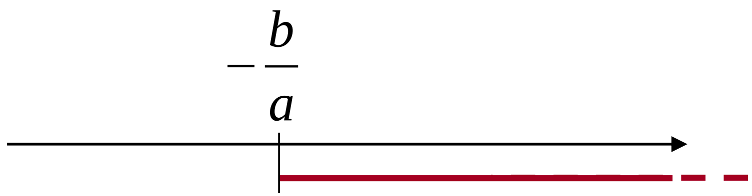
$$ax + b > 0 \quad \text{e} \quad -ax - b < 0, \quad \text{con} \;\; a \neq 0$$

sono equivalenti, nella risoluzione delle disequazioni di I grado ci si può sempre ricondurre al caso in cui il coefficiente $a > 0$

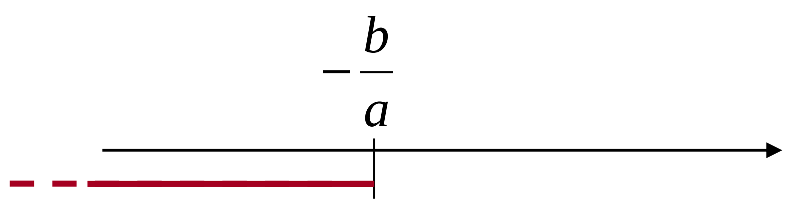
Disequazioni algebriche di I grado

<u>$a>0$</u> (per due numeri reali $a \neq 0$ e b)

- $ax + b > 0 \;\Rightarrow ax > -b \;\Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$



- $ax + b < 0 \;\Rightarrow ax < -b \;\Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

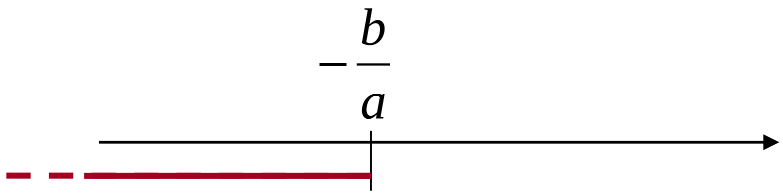


Disequazioni di I grado

Una disequazione di primo grado ammette sempre *infinite soluzioni* date da

$$x > -\frac{b}{a}$$

$$x < -\frac{b}{a}$$



Disequazioni di I grado

Esercizio 12. Risolvere la seguente disequazione

$$-3x < -5$$

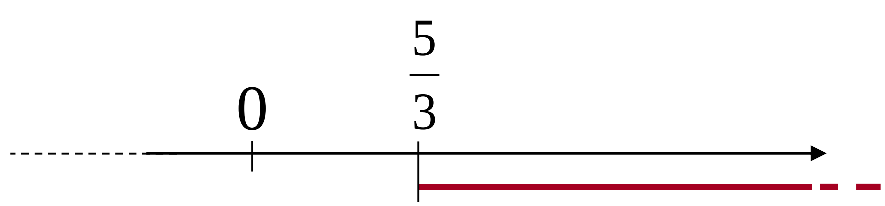
Soluzione. Si può cambiare il segno a entrambi i membri, in modo da rendere positivo il coefficiente -3, cambiando il verso della disequazione:

$$3x > 5$$

Possiamo ora moltiplicare entrambi i membri per 1/3 > 0, ottenendo:

Insieme soluzioni

$$\boxed{x > \frac{5}{3}}$$



Disequazioni di I grado

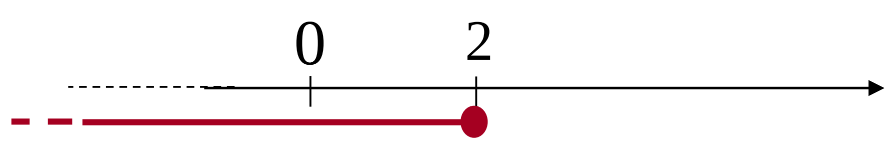
Esercizio 13. Risolvere la seguente disequazione

$$5x - 10 \leq 0$$

<u>*Soluzione*</u>.

$$5x \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{10}{5} \Rightarrow \boxed{x \leq 2}$$

Insieme soluzioni



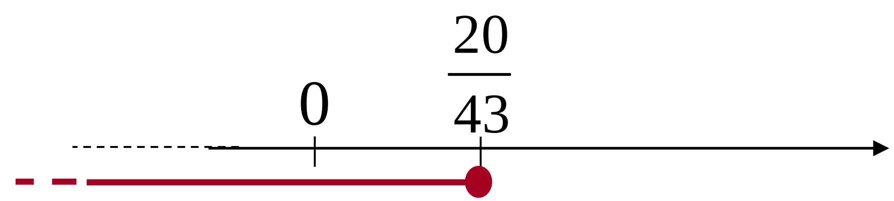
Esercizio 14. Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x}{4}\le 1-3x$$

Soluzione. Calcolando al denominatore il m.c.m., la disequazione si riscrive in forma equivalente come segue

$$\frac{4x-8+3x}{12}\le\frac{12-36x}{12}\Rightarrow 4x-8+3x\le 12-36x\Rightarrow$$

$$43x\le 20\Rightarrow \boxed{x\le\frac{20}{43}}$$



Insieme soluzioni

Disequazioni di I grado

Esercizio 15. Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt{3}x - \frac{5}{2} \geq \frac{x}{2} - \frac{3x+10}{4}$$

Soluzione. Calcolando al denominatore il m.c.m., la disequazione si riscrive in forma equivalente come segue

$$\frac{4\sqrt{3}x - 10}{4} \geq \frac{2x - 3x - 10}{4} \Rightarrow 4\sqrt{3}x - \cancel{10} \geq 2x - 3x - \cancel{10} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{3}x - 2x + 3x \geq 0 \Rightarrow 4\sqrt{3}x + x \geq 0 \Rightarrow x\left(4\sqrt{3}+1\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x \geq 0}$$

Insieme soluzioni

Disequazioni algebriche di II grado

In matematica, una disequazione di *secondo grado* o *quadratica* è una disequazione algebrica ad una sola incognita x che compare con grado massimo pari a 2, e la cui espressione è riconducibile alla forma :

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$\left(ax^2 + bx + c < 0\right)$$

$$a \neq 0, a, b, c \in R$$

Disequazioni algebriche di II grado

Osservazione. Applicando i principi di equivalenza, dobbiamo ricordarci che , per $a \neq 0$, con $a, b, c \in R$, le disequazioni di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{e} \quad -ax^2 - bx - c < 0$$

sono equivalenti

Quindi, nella risoluzione delle disequazioni di II grado ci si può sempre ricondurre al caso in cui il coefficiente a è positivo

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

$$ax^2+bx+c>0 \text{ oppure } ax^2+bx+c<0$$

$$a,b,c \in R$$

- Passo1: verificare il segno del coefficiente a. Nel caso in cui $a<0$, cambiare il segno a tutti i termini della disequazione e cambiare il verso della disequazione.

- Passo2: determinare le radici reali x_1 e x_2 (se esistono) dell'equazione di II grado associata $ax^2+bx+c=0$ utilizzando la formula:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{con } \Delta=b^2-4ac$$

I CASO: $\Delta > 0, a > 0$

Due soluzioni reali distinte

- $ax^2 + bx + c > 0 \iff x < x_1, \; x > x_2$

- $ax^2 + bx + c < 0 \iff x_1 < x < x_2$

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

I CASO: $\Delta > 0, a > 0$

Due soluzioni reali distinte

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow x \leq x_1,\ \ x \geq x_2$

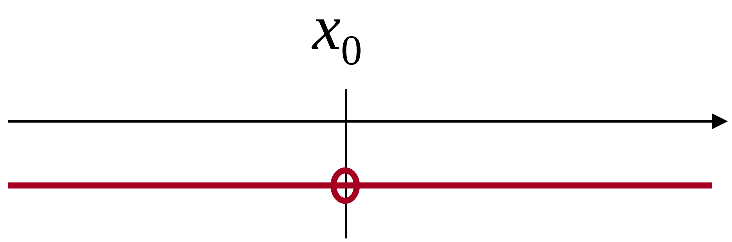
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

II CASO: $\Delta = 0,\ a > 0$

Due soluzioni reali coincidenti

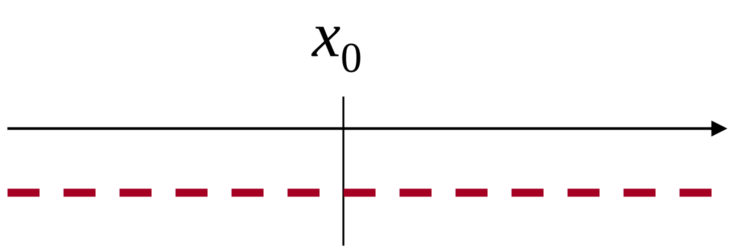
- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R, x \neq x_0$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

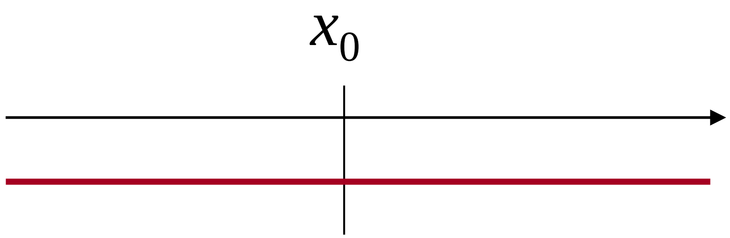


Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

II CASO: $\Delta = 0,\ a > 0$

Due soluzioni reali coincidenti

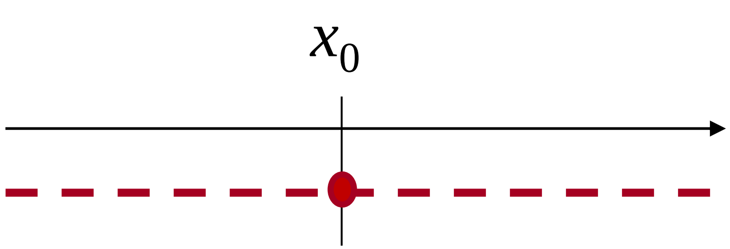
- $ax^2 + bx + c \geq 0 \ \Rightarrow \forall x \in R$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x = x_0$



Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$

Non esistono soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R$

- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$

Non esistono soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$

- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

Esercizio 16. Risolvere la seguente disequazione

$$-x^2+12x-11\geq 0$$

<u>*Soluzione*</u>. Cambiamo il segno a tutti i termini e cambiamo anche il verso della disequazione:

$$x^2-12x+11\leq 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta=b^2-4ac=144-44=100$

L'equazione associata ha due soluzioni distinte:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{12\pm 10}{2}=\left\langle\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right.$$

Disequazioni algebriche di II grado

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione $x^2 - 12x + 11 \leq 0$ sono:

$$\boxed{1 \leq x \leq 11}$$

Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 17. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$$

Così, l'equazione associata ha due soluzioni distinte

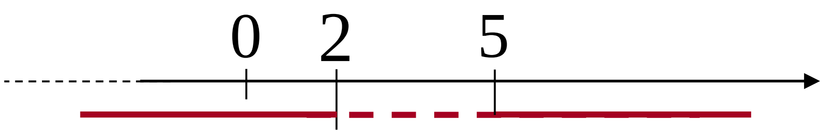
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

Disequazioni algebriche di II grado

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione

$x^2 - 7x + 10 > 0$ sono:

$$\boxed{x < 2 \text{ e } x > 5}$$



Esercizio 18. Risolvere la seguente disequazione

$$2x^2+13x+20>0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta=b^2-4ac=169-160=9$$

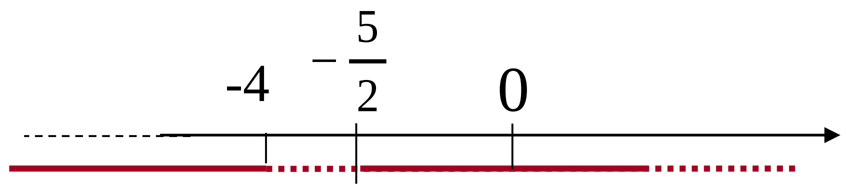
Così, l'equazione associata ha due soluzioni distinte

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-13\pm 3}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-4\\ -\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

Disequazioni algebriche di II grado

In base al segno del coefficiente $a > 0$ e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione $2x^2+13x+20>0$ sono:

$$\boxed{x < -4 \ \text{ e } \ x > -\frac{5}{2}}$$



Esercizio 19. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2-10x+25>0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 100 = 0$$

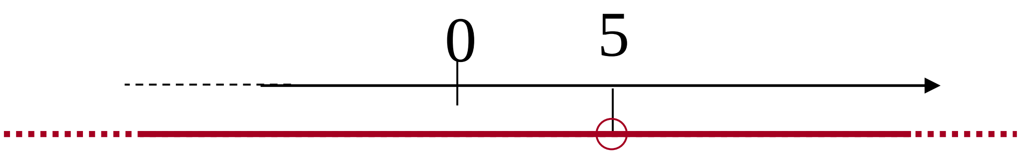
Così, l'equazione associata ha due soluzioni reali coincidenti

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Disequazioni algebriche di II grado

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione $x^2 - 10x + 25 > 0$ sono:

$$\boxed{\forall x \in R, \text{ con } x \neq 5}$$



Osservazione 1

Infatti, la disequazione di partenza $x^2 - 10x + 25 > 0$

si può riscrivere:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 > 0$$

Osservazione 2

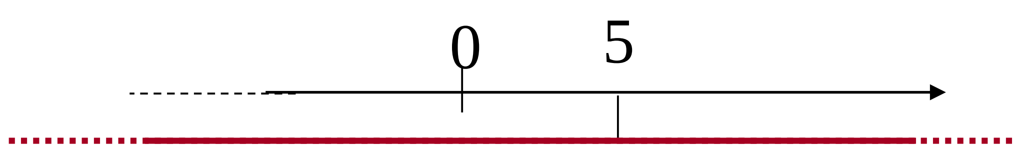
Se avessimo dovuto risolvere la seguente disequazione

$$x^2-10x+25 \geq 0$$

Soluzione.

$$\Delta=0 \qquad x_{1,2}=\frac{10 \pm \sqrt{0}}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$\boxed{\forall x \in R}$$



Infatti, è vero che: $(x-5)^2 \geq 0$ sempre!

Esercizio 20. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 14x + 49 \leq 0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 196 = 0$$

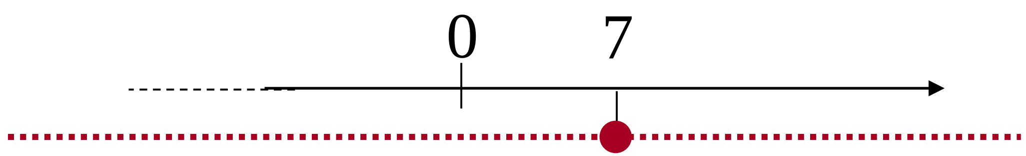
Così, l'equazione associata ha due soluzioni coincidenti

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Disequazioni algebriche di II grado

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione $x^2 - 14x + 49 \leq 0$ sono:

$$\boxed{x = 7}$$



Osservazione. Infatti, la disequazione di partenza si può riscrivere:

$$(x-7)^2 \leq 0$$

Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 21. Risolvere la seguente disequazione

$$-12x^2 - 5x \geq 2$$

Soluzione. Si può cambiare il segno a entrambi i membri, cambiando il verso della disequazione:

$$-12x^2 - 5x - 2 \geq 0 \Rightarrow 12x^2 + 5x + 2 \leq 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 96 = -71 < 0$

Se il discriminante è negativo, il trinomio $12x^2 + 5x + 2$ è sempre positivo

Disequazioni algebriche di II grado

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante la disequazione $12x^2+5x+2 \leq 0$ non ammette soluzioni:

$$\boxed{\nexists x \in R}$$

Esercizio 22. Risolvere la seguente disequazione

$$2x^2 - 3x > -2$$

Soluzione. Si può portare il -2 al primo membro:

$$2x^2 - 3x + 2 > 0$$

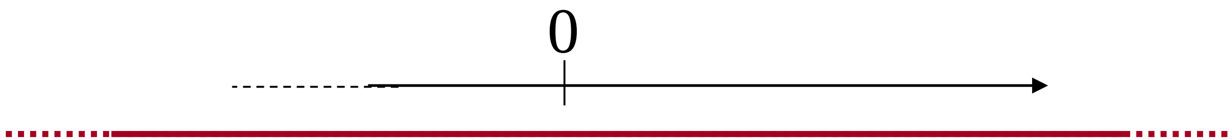
Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$

Se il discriminante è negativo, il trinomio $12x^2 + 5x + 2$ è sempre positivo

Disequazioni algebriche di II grado

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante la disequazione $2x^2 - 3x + 2 > 0$ ammette infinite soluzioni:

$$\boxed{\forall x \in R}$$



Esercizio 23. Risolvere la seguente disequazione di II grado:

$$\frac{x^2+3}{2} > \frac{2\sqrt{6}x - x^2}{2}$$

Soluzione: la disequazione può essere riscritta come segue

$$x^2+3 > 2\sqrt{6}x - x^2 \Rightarrow x^2+3-2\sqrt{6}x+x^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{6} \pm \sqrt{24-24}}{4} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

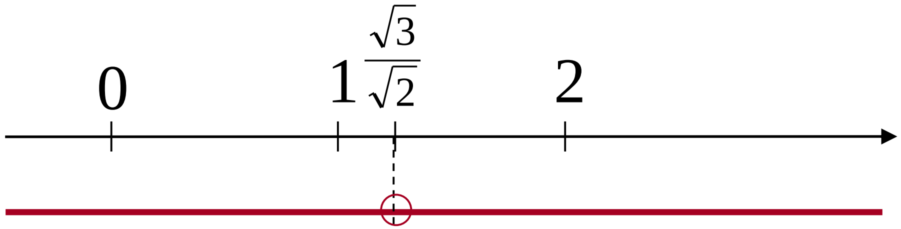
Esercizi di riepilogo

Le soluzioni dell'equazione associata sono reali e coincidenti e l'unica radice è:

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Quindi la disequazione ha soluzioni:

$$\boxed{\forall x \in R, \quad \text{con} \quad x \neq \sqrt{\frac{3}{2}}}$$



Infatti, la disequazione di partenza può essere riscritta come segue

$$2(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\ )^2 > 0$$

Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 24. Consideriamo gli insiemi di numeri reali

$$E_1 = \{x \in R : x^2 - 6x - 7 \leq 0\}$$

$$E_2 = \{x \in R : -x^2 + 12x - 27 > 0\}$$

Calcolare $E_1 \cap E_2$ ed $E_1 \cup E_2$

Soluzione. Per conoscere gli elementi dei due insiemi bisogna risolvere le due disequazioni di secondo grado che caratterizzano i due insiemi

Disequazioni algebriche di II grado

Vediamo quali sono gli elementi di E_1

$$x^2 - 6x - 7 \leq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = x_1 = -1, x_2 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 7$$

Vediamo quali sono gli elementi di E_2

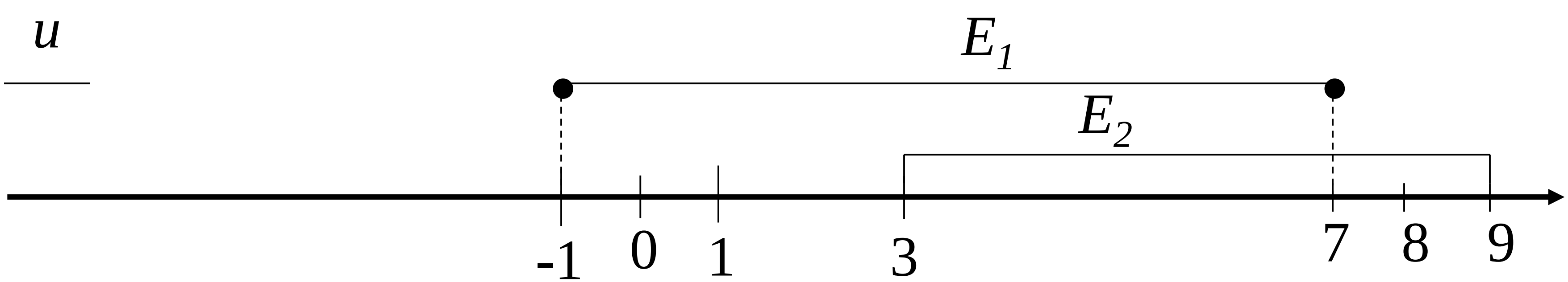
$$x^2 - 12x + 27 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-108}}{-2} = \frac{-12 \pm 6}{-2} = x_1 = 3, x_2 = 9$$

$$\Rightarrow 3 < x < 9$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$E_1 = \{x \in R : -1 \le x \le 7\}$$

$$E_2 = \{x \in R : 3 < x < 9\}$$



$$E_1 \cap E_2 = \{x \in R : 3 < x \le 7\}$$

$$E_1 \cup E_2 = \{x \in R : -1 \le x < 9\}$$

Formule

TRE FORMULE SEMPRE PRESENTI

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Esercizi di riepilogo

Esercizio . Risolvere le seguenti disequazioni di II grado:

- $x^2 + 3 > 0$
- $x^2 + 5 \leq 0$
- $x^2 + \sqrt{2} \geq 0$
- $x^2 - 3 \leq 0$
- $x^2 + 2x \leq 0$

Insiemistica

Esercizio. Dati $C=\{x \in R : 3 < x < 7\}$, $D = \{x \in R : 5 < x \leq 10\}$,

$E=\{x \in R : 4{,}3 < x \leq 6{,}2\}$

Scrivere e rappresentare graficamente gli intervalli:

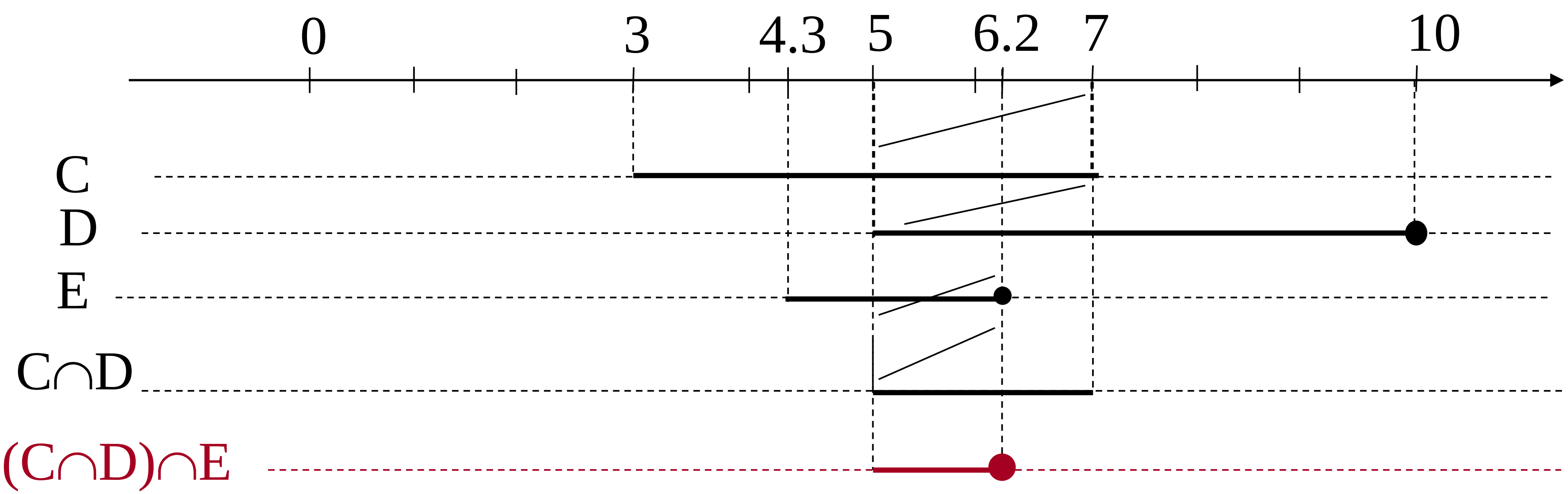
$C \cap D$, $(C \cap D) \cap E$, $C \cup D$, $C \cup (D \cup E)$, $(C \cup D) \cap E$, $(C \cap D) \cup E$

Esercizio. Dati $C=\{x \in R : 3 < x < 7\}$, $D=\{x \in R : 5 < x \leq 10\}$,

$E=\{x \in R : 4{,}3 < x \leq 6{,}2\}$

Scrivere e rappresentare graficamente gli intervalli:

$C \cap D$, $(C \cap D) \cap E$, $C \cup D$, $C \cup (D \cup E)$, $(C \cup D) \cap E$, $(C \cap D) \cup E$



Esercizi insiemistica

$C \cap D$, $(C \cap D) \cap E$, $C \cup D$, $C \cup (D \cup E)$, $(C \cup D) \cap E$, $(C \cap D) \cup E$