UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II - DIPARTIMENTO DI AGRARIA

DIPARTIMENTO DI AGRARIA

RIENTAGRARIA

Precorsi 2019

Matematica

Richiami di trigonometria
(introduzione alla misura degli angoli ed alle funzioni trigonometriche)

Rosanna Campagna

Per definire le funzioni trigonometriche
e determinarne le caratteristiche,
introduciamo prima le nozioni di

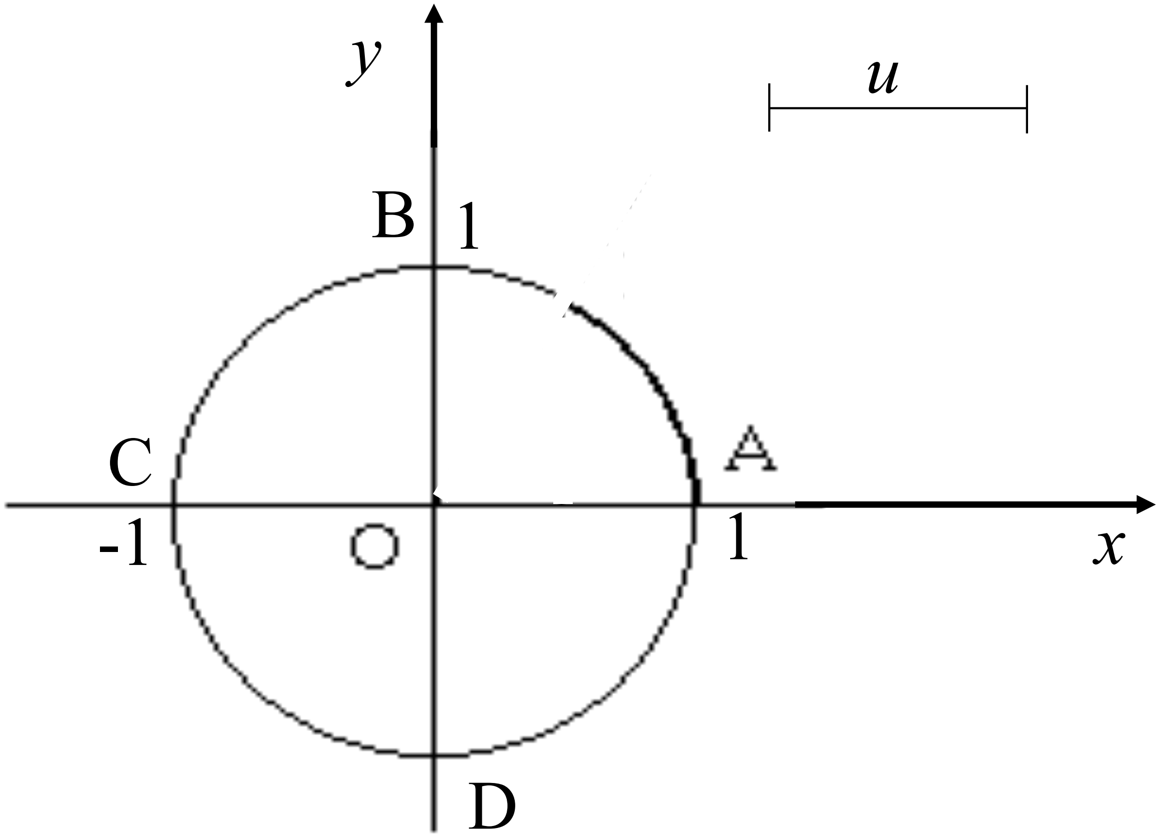
circonferenza goniometrica e radiante

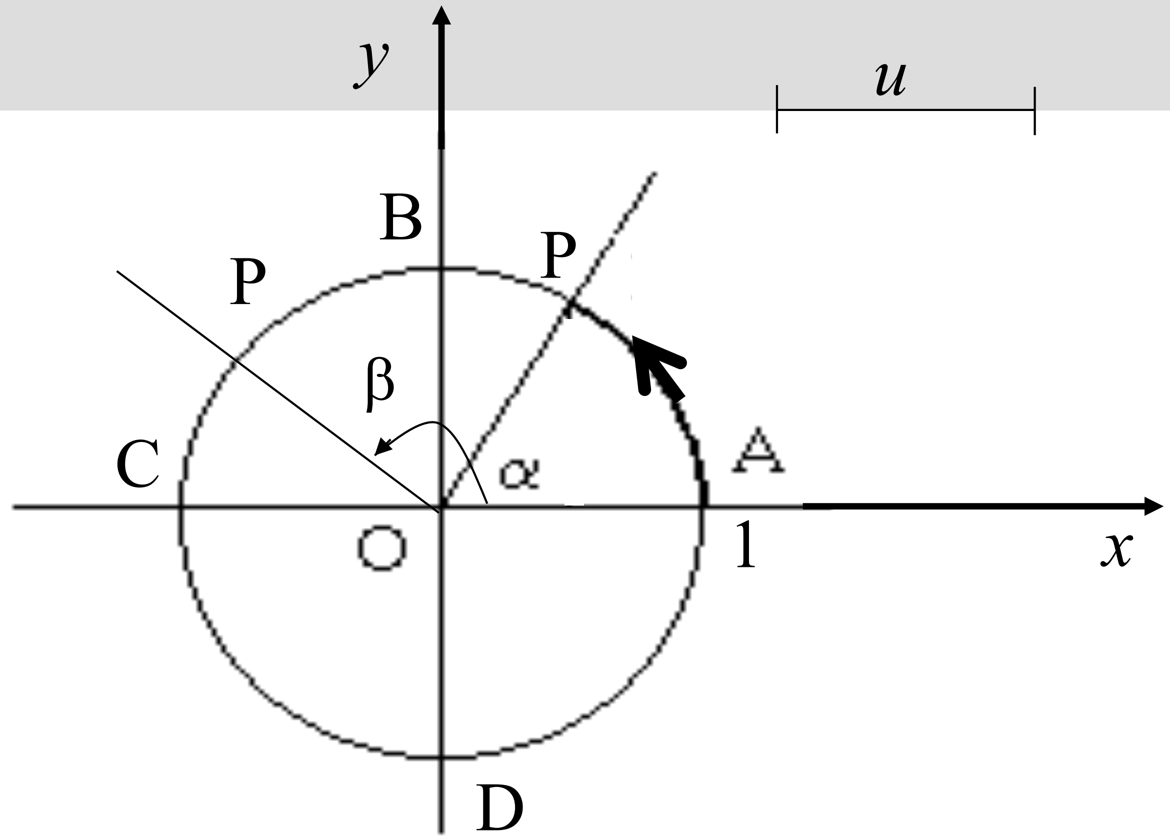
Circonferenza goniometrica

In un sistema di assi cartesiani ortogonali, consideriamo una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario (pari, cioè, all'unità di misura fissata). Tale circonferenza viene detta

circonferenza goniometrica

A (1,0)
B (0,1)
C (-1,0)
D (0,-1)





Per convenzione, tale circonferenza viene percorsa positivamente in senso antiorario a partire dal punto A origine degli archi.

In questo modo la congiungente l'origine O con il generico punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica forma con l'asse x un angolo α, β,…

In generale, siamo in grado di misurare gli angoli in gradi.

Ad esempio:

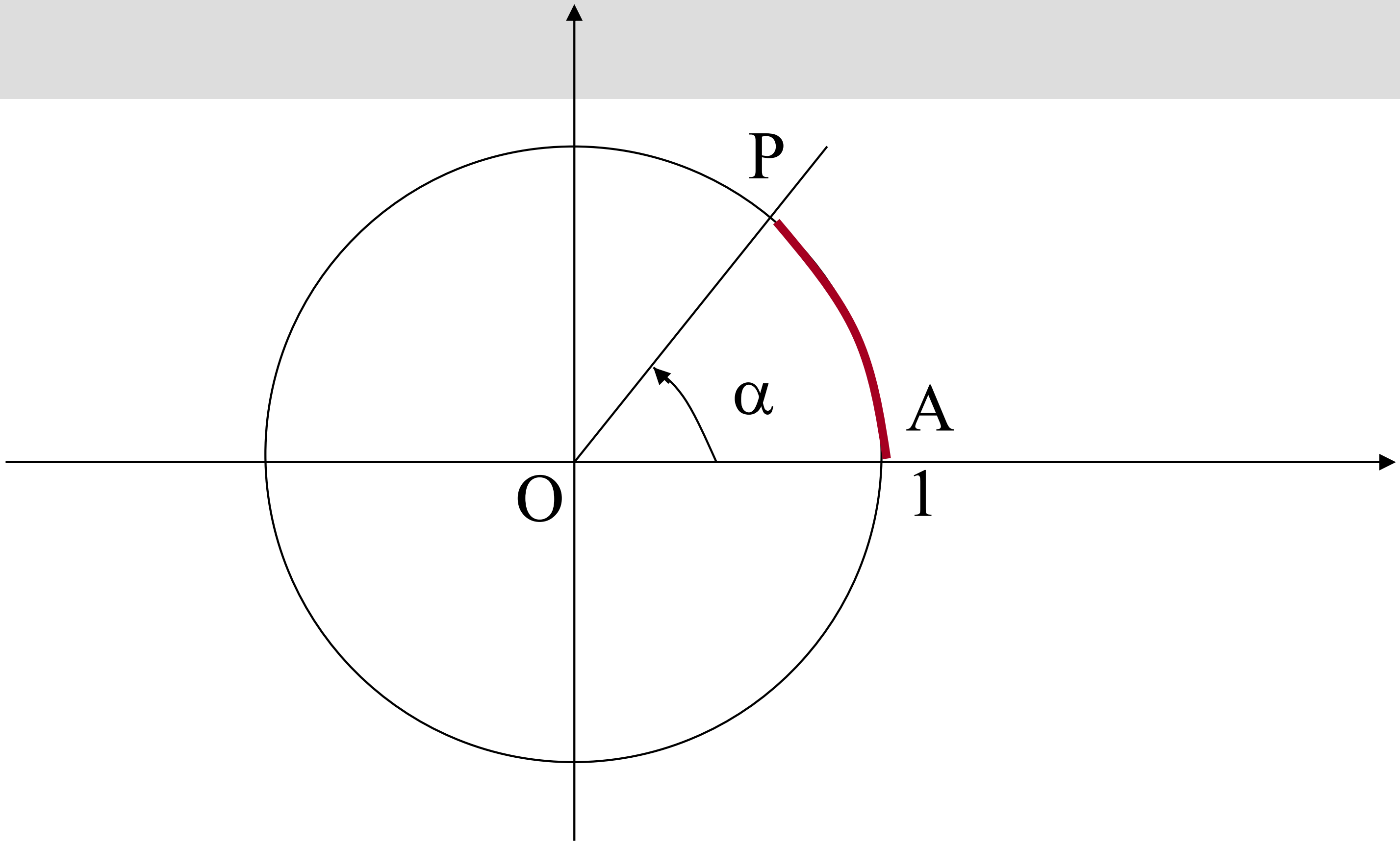
Angolo retto misura 90°

Angolo piatto misura 180°

Angolo giro misura 360°

Per studiare le funzioni trigonometriche è opportuno adottare una diversa unità di misura per gli angoli:

il radiante



Def. La misura di un angolo piano α espressa in radianti è data dalla lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ di circonferenza goniometrica intercettato dalle due semirette che individuano l'angolo stesso

Da tale definizione segue immediatamente che:

Angolo giro misura in radianti 2π
(è uguale alla lunghezza dell'intera circonferenza unitaria: $r = 1$)

Angolo piatto misura π
(è uguale alla lunghezza di metà circonferenza unitaria: $r = 1$)

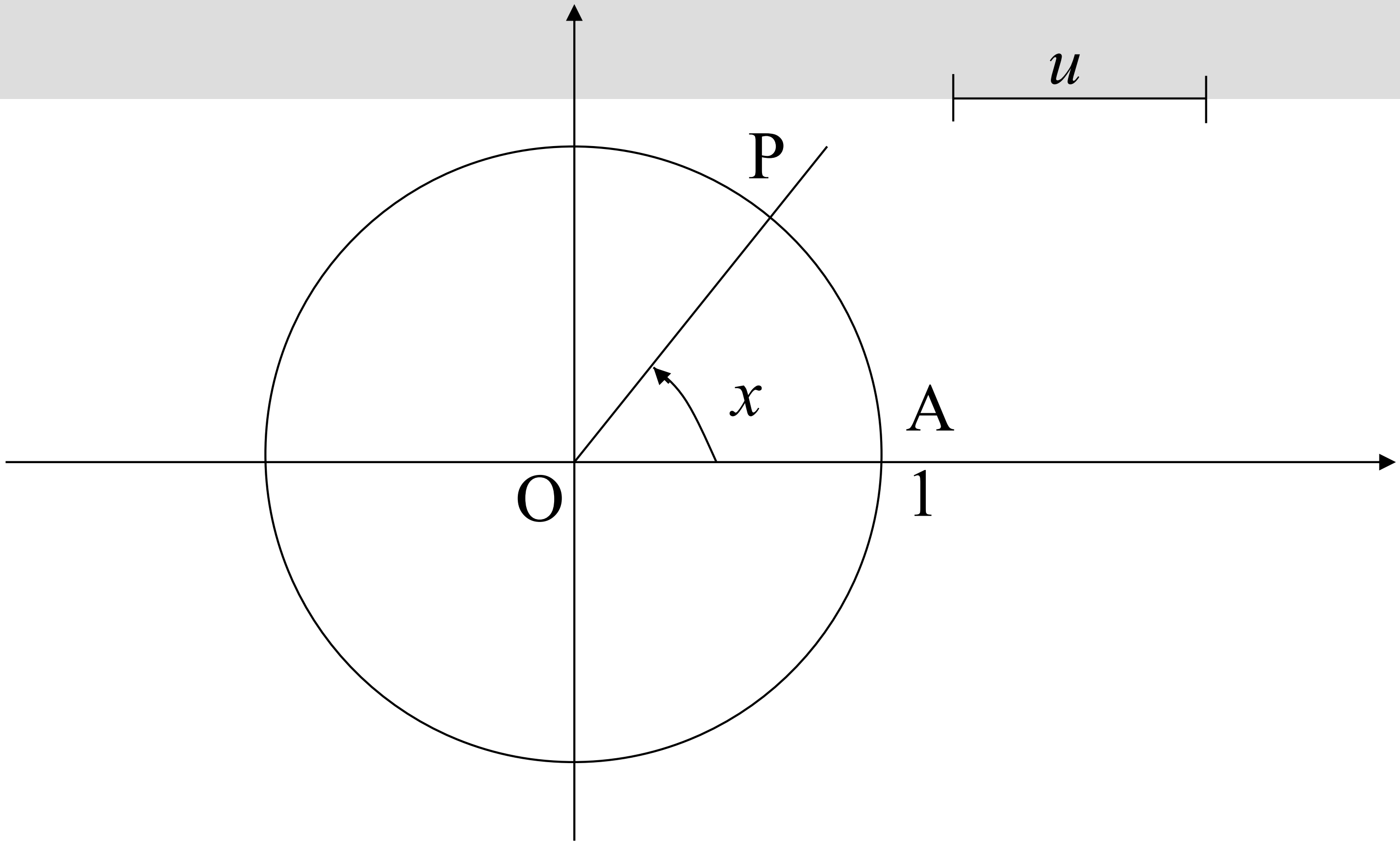
Angolo retto misura in radianti $\pi/2$
(è uguale alla lunghezza di un quarto di circonferenza unitaria: $r = 1$)

Si passa dai gradi ai radianti con la seguente proporzione:

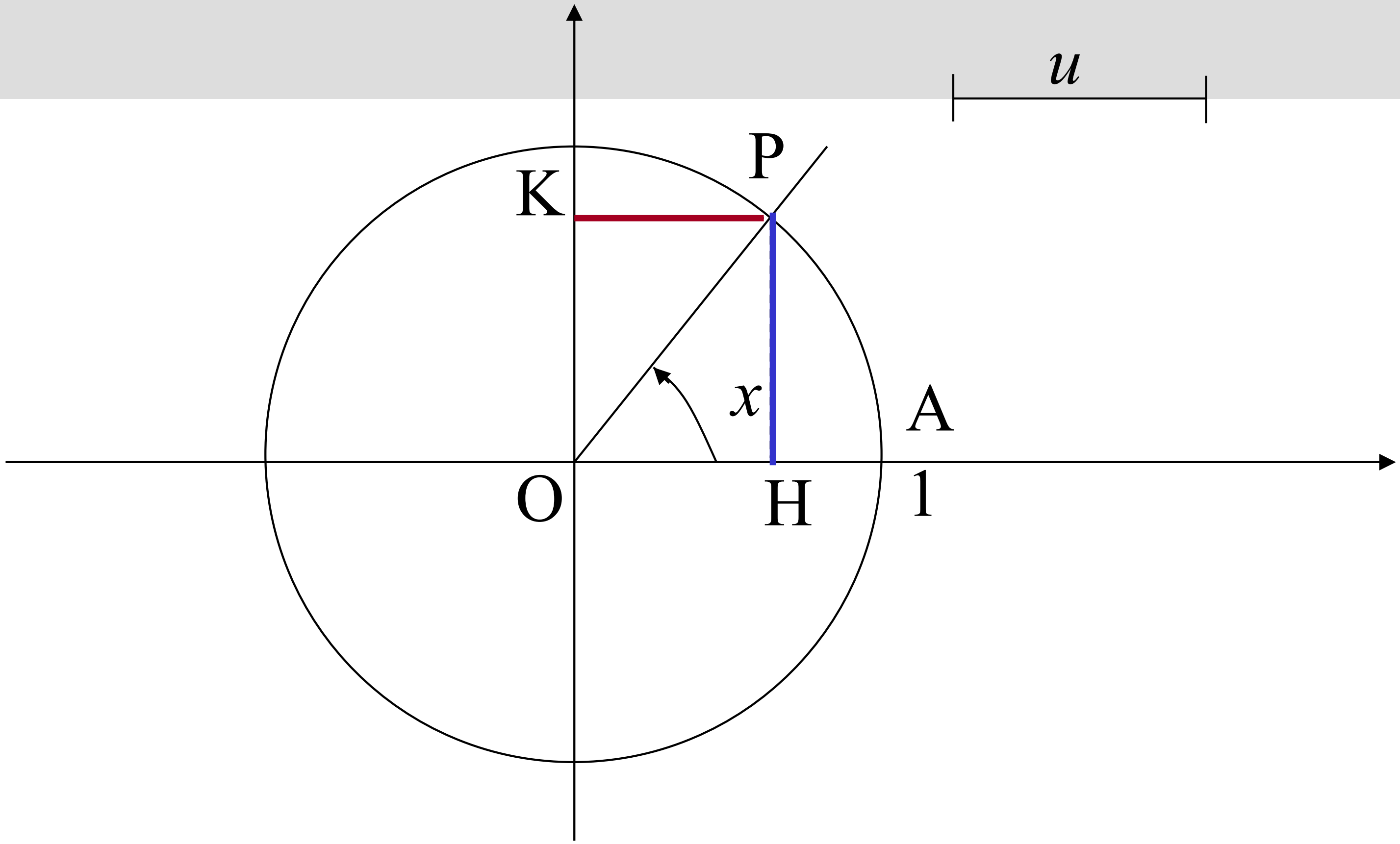
$$\alpha^{\circ} : 180^{\circ} = \alpha^{\text{rad}} : \pi$$

Con successive suddivisioni si verifica che:

gradi	radianti
360°	2 π
180°	π
90°	π/2
45°	π/4
60°	π/3
30°	π/6
120°	2/3 π
270°	3/2 π

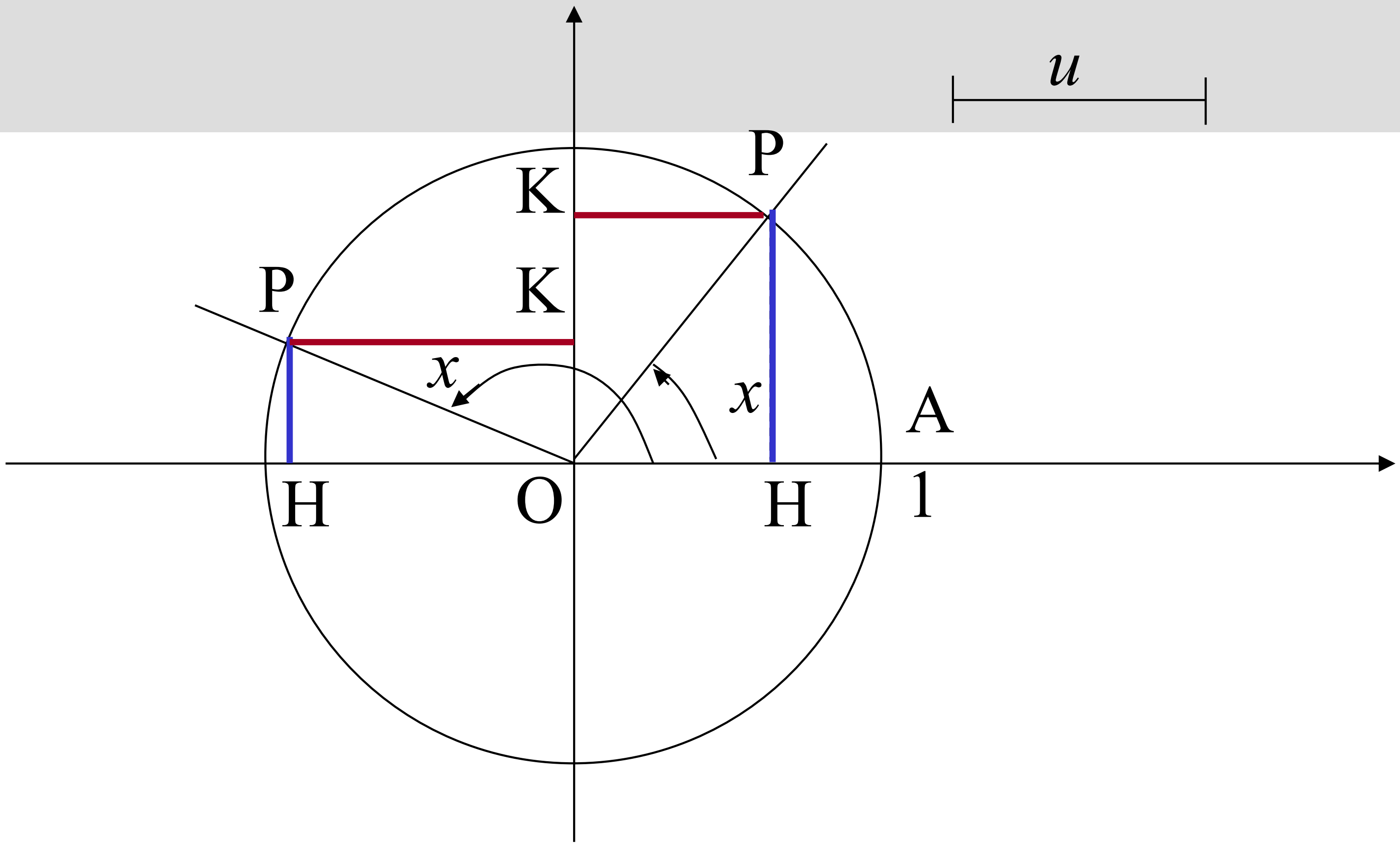


Sia dato un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica a partire dal punto A origine degli archi e sia x l'angolo sotteso dal punto P



Def. Si definisce *sen x* l’ordinata del punto P
(cioè il segmento PH)

Def. Si definisce *cos x* l’ascissa del punto P
(cioè il segmento PK)



Quando il punto P si muove sulla circonferenza goniometrica variano:

- l'ampiezza dell'angolo x sotteso dal punto P
- l'ascissa e l'ordinata del punto P

$\Downarrow$

Al variare di x variano i valori di

$sen\,x$ e $cos\,x$

$\Downarrow$

$sen\,x$ e $cos\,x$ sono funzioni dell'arco x

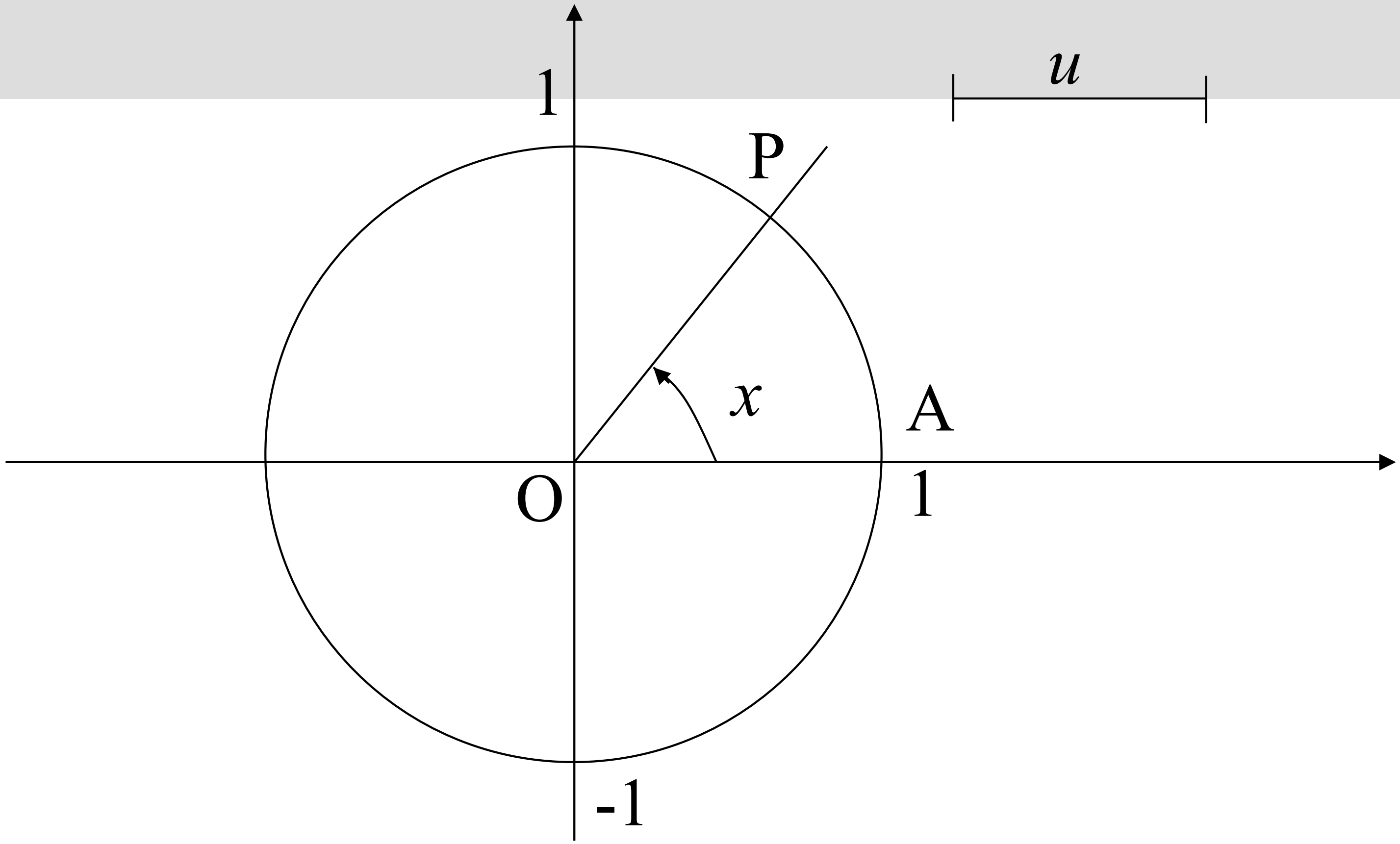
FUNZIONE SENO

$$f(x) = sen\,x$$

$$f : x \in R \to sen\,x \in [-1,+1]$$

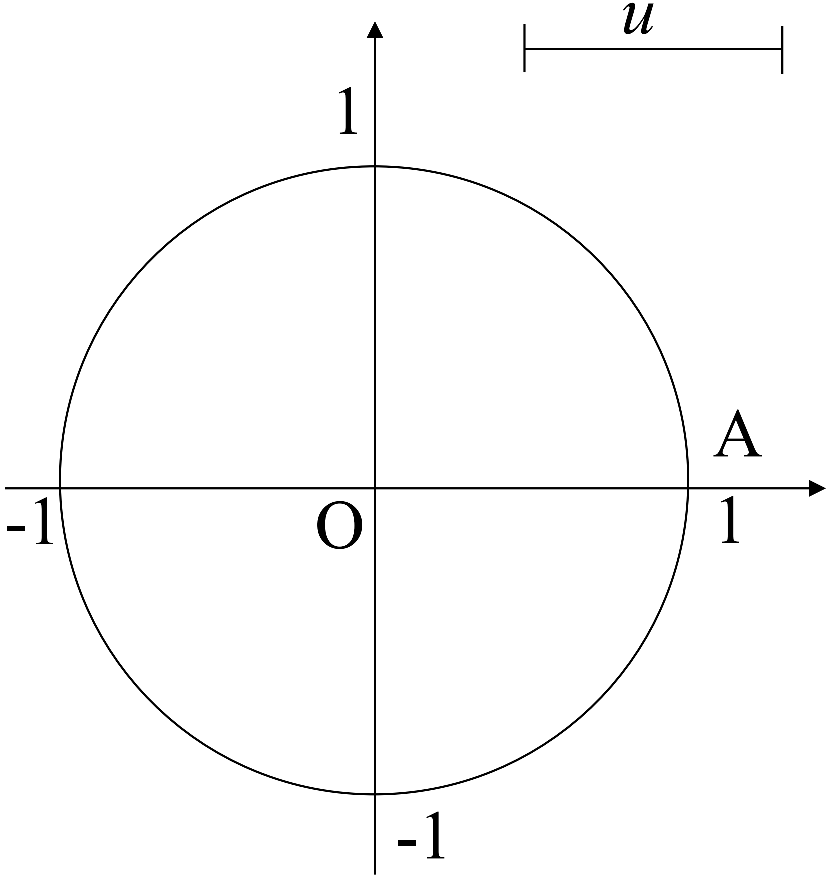
Il dominio della funzione seno è tutto R poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri

(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)



Il codominio della funzione seno è l’intervallo [-1,+1] poiché il minimo valore che può assumere l’ordinata del punto P è -1, mentre il massimo valore è +1

Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione seno assume un corrispondente valore numerico



x	$sen\ x$
0	0
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	1
π	0
$\pi/6$	1/2
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$3/2\ \pi$	-1
$2\ \pi$	0

OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π)

la funzione $sen\,x$

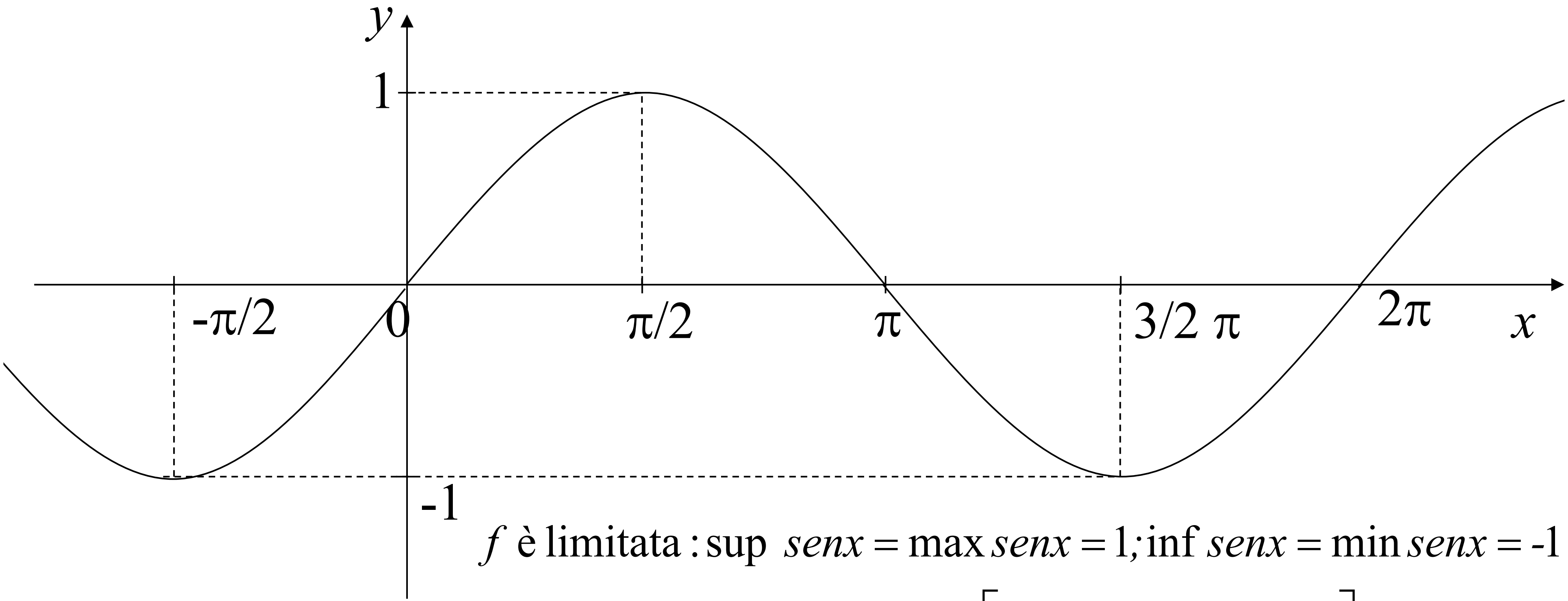
assume gli stessi valori

⇓

la funzione seno è periodica di periodo 2π

$$sen(x+2\pi)=sen\,x,\ \forall x\in R$$

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione seno al variare di x nel dominio R, il grafico della funzione seno è:



f è limitata : sup $senx = \max senx = 1; \inf senx = \min senx = -1$

f strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in Z$

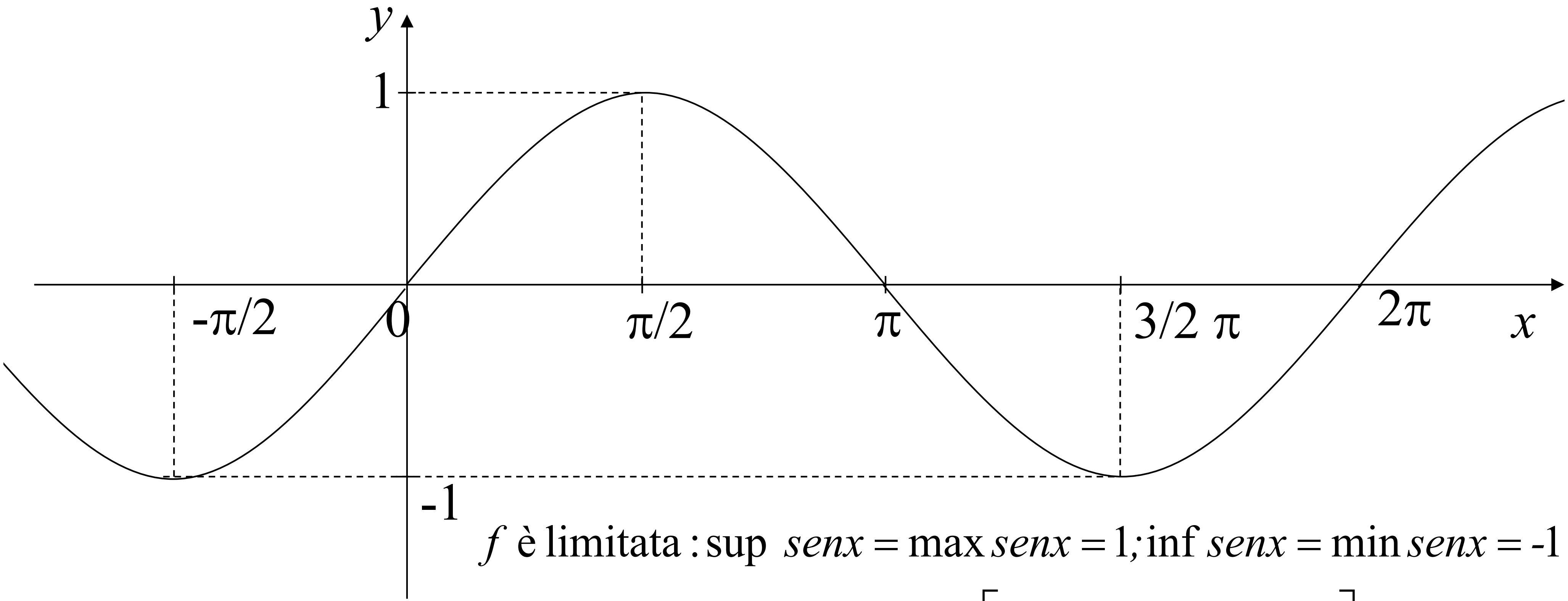
f strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right], k \in Z$

f dispari : $-senx = sen(-x)$

$\Downarrow$

Non è invertibile su R!

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione seno al variare di x nel dominio R, il grafico della funzione seno è:



$$f \text{ è limitata : } \sup\ senx = \max senx = 1; \inf senx = \min senx = -1$$

$$f \text{ strettamente crescente in } \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in Z$$

$$f \text{ strettamente decrescente in } \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right], k \in Z$$

$$f \text{ dispari : } -senx = sen(-x)$$

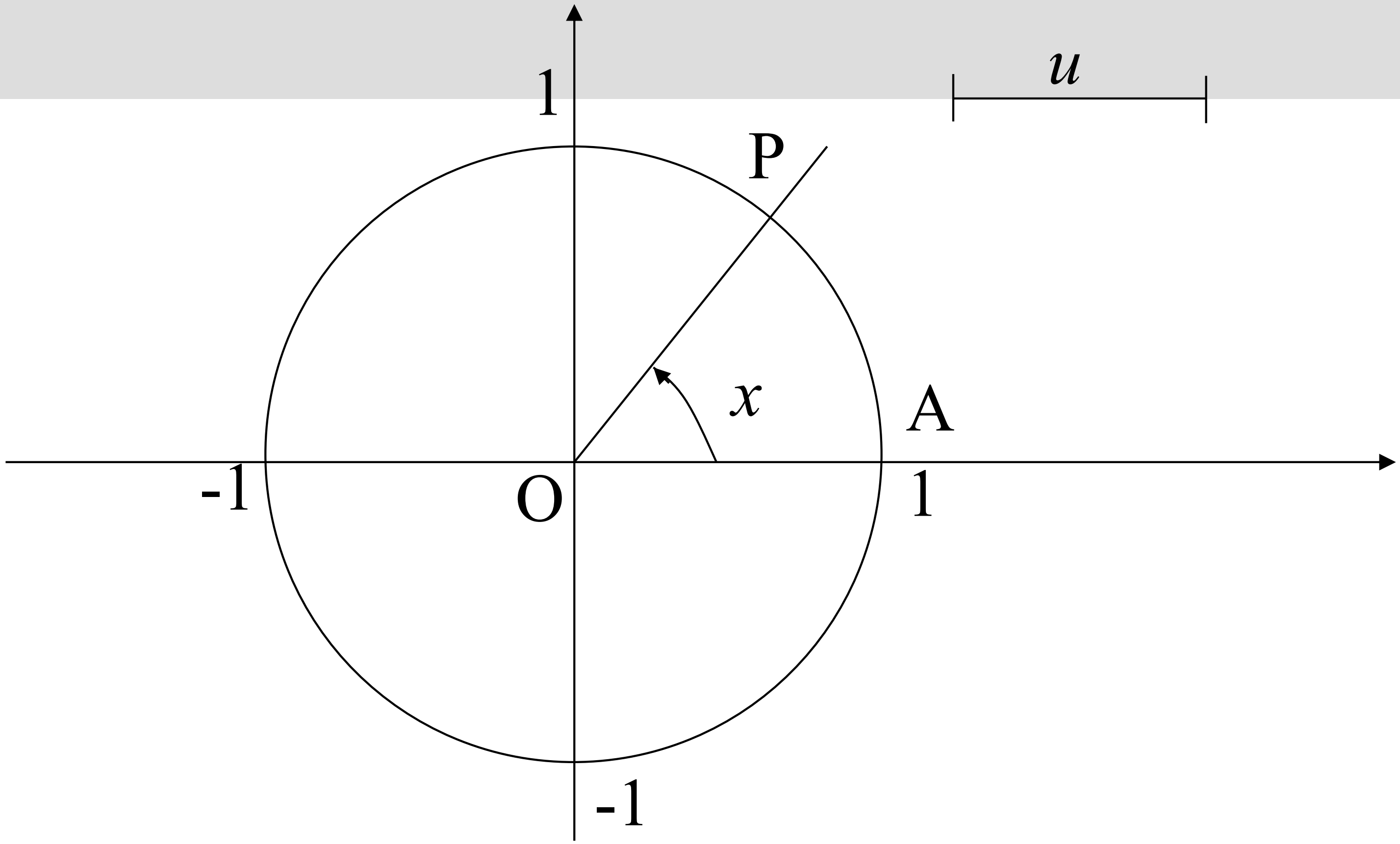
FUNZIONE COSENO

$$f(x) = \cos x$$

$$f : x \in R \rightarrow \cos x \in [-1,+1]$$

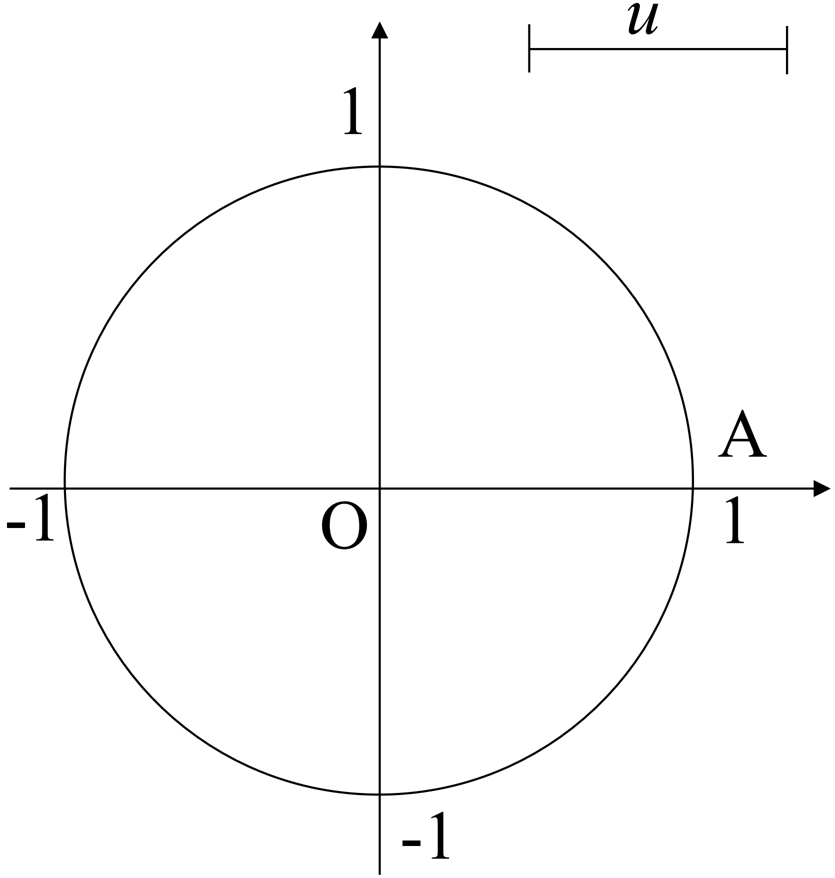
Il dominio della funzione coseno è tutto R poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri

(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)



Il codominio della funzione coseno è l’intervallo [-1,+1] poiché il minimo valore che può assumere l’ascissa del punto P è -1, mentre il massimo valore è +1

Per ogni valore fissato dell'angolo x, la funzione coseno assume un corrispondente valore numerico



x	$\cos x$
0	1
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	0
π	-1
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/3$	1/2
$3/2\ \pi$	0
$2\ \pi$	1

OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π)

la funzione $\cos x$

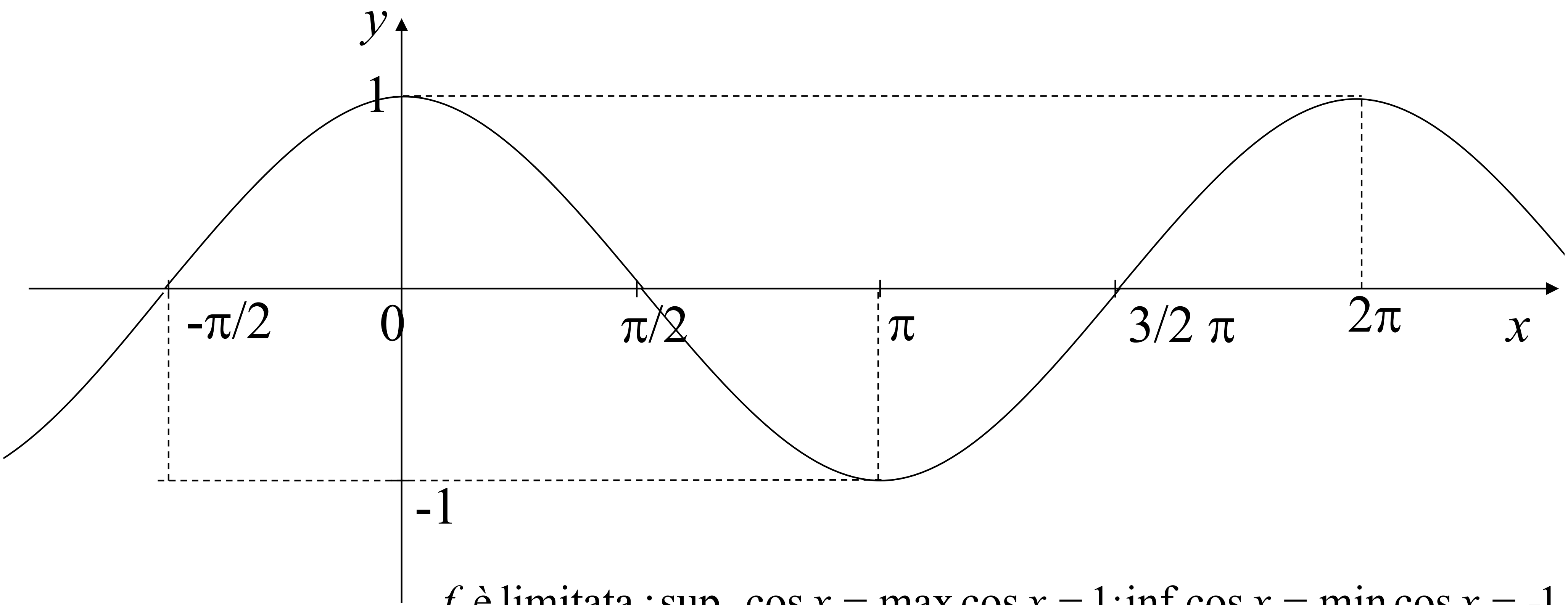
assume gli stessi valori

⇓

la funzione coseno è periodica di periodo 2π

$$\cos(x+2\pi)=\cos x, \forall x \in R$$

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione coseno al variare di x nel dominio R, il grafico della funzione coseno è:



f è limitata : $\sup \cos x = \max \cos x = 1; \inf \cos x = \min \cos x = -1$

f strettamente crescente in $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

f strettamente decrescente in $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

f pari : $\cos x = \cos(-x)$

FUNZIONE TANGENTE

$$f(x) = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

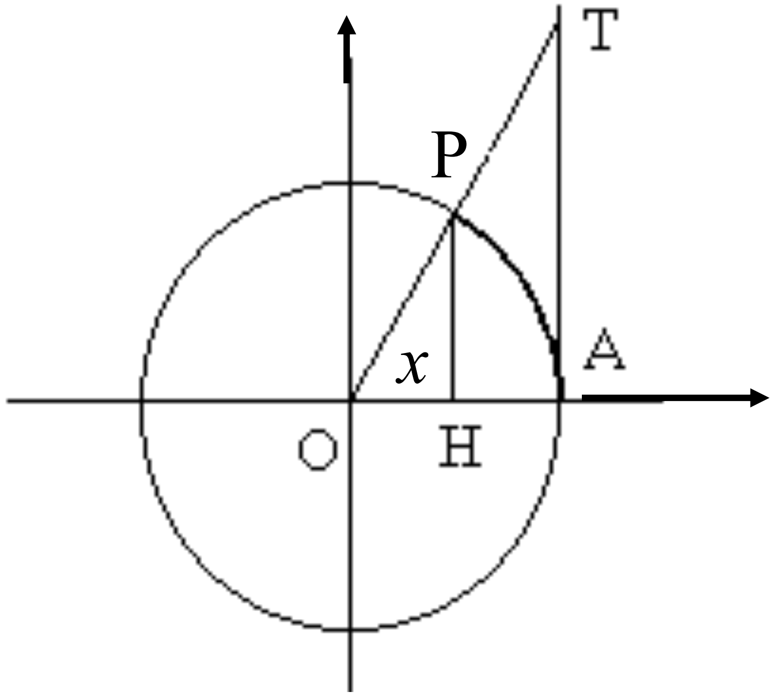
Affinchè abbia senso il rapporto $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$,

deve essere il denominatore $\cos x \neq 0$

$$\Downarrow$$

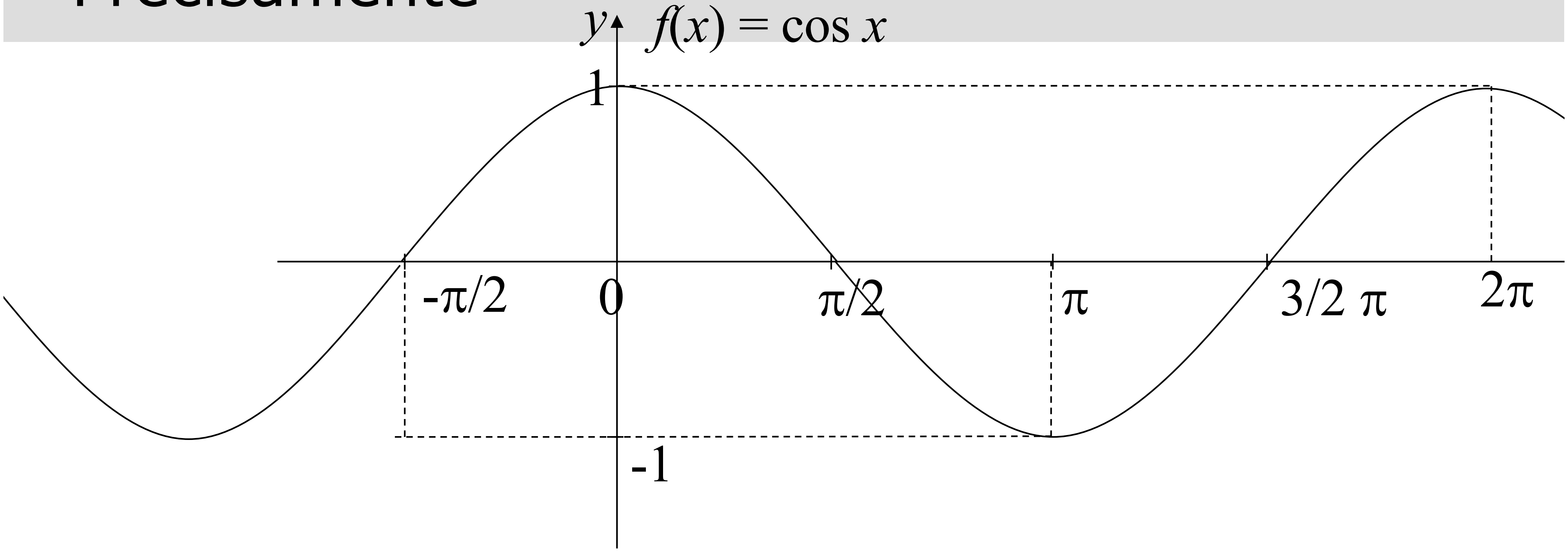
Il dominio della funzione tangente è tutto R privato dei valori x che annullano il coseno al denominatore

FUNZIONE TANGENTE



Si può inoltre dimostrare che **tg** x è l' ordinata del punto T di intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A e la semiretta OT

Precisamente



$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$$

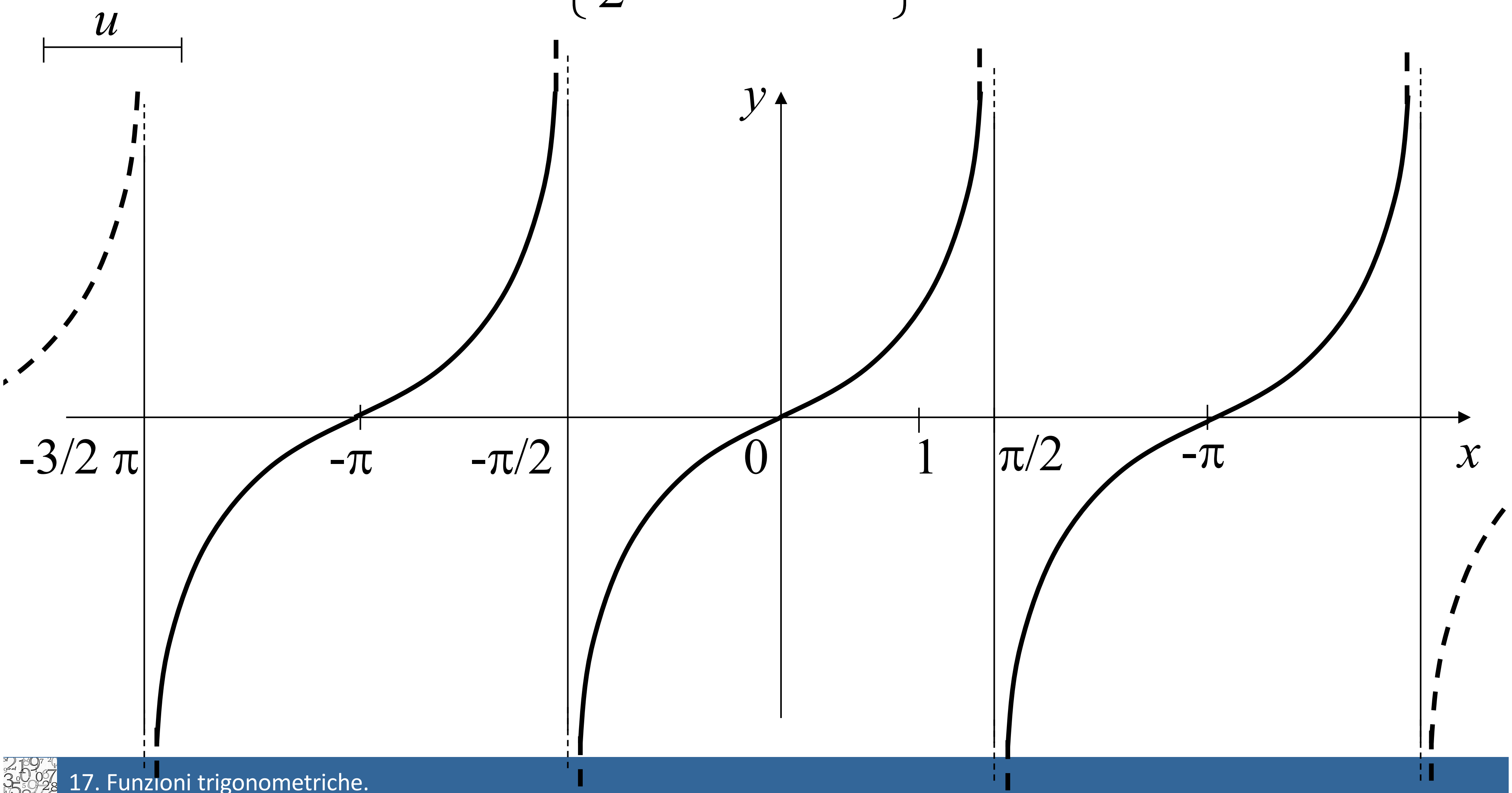
$$\Downarrow$$

$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

FUNZIONE TANGENTE

$$f(x) = \tan x$$

$$f : x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \rightarrow \tan x \in R$$



Per ogni valore fissato dell'angolo x, la funzione tangente assume un corrispondente valore numerico

x	***tan x***
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	/
π	0
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$3/2\ \pi$	/
$2\ \pi$	0

OSSERVAZIONE

Ogni mezzo giro (pari a metà arco che misura π)

la funzione $tan.x$

assume gli stessi valori

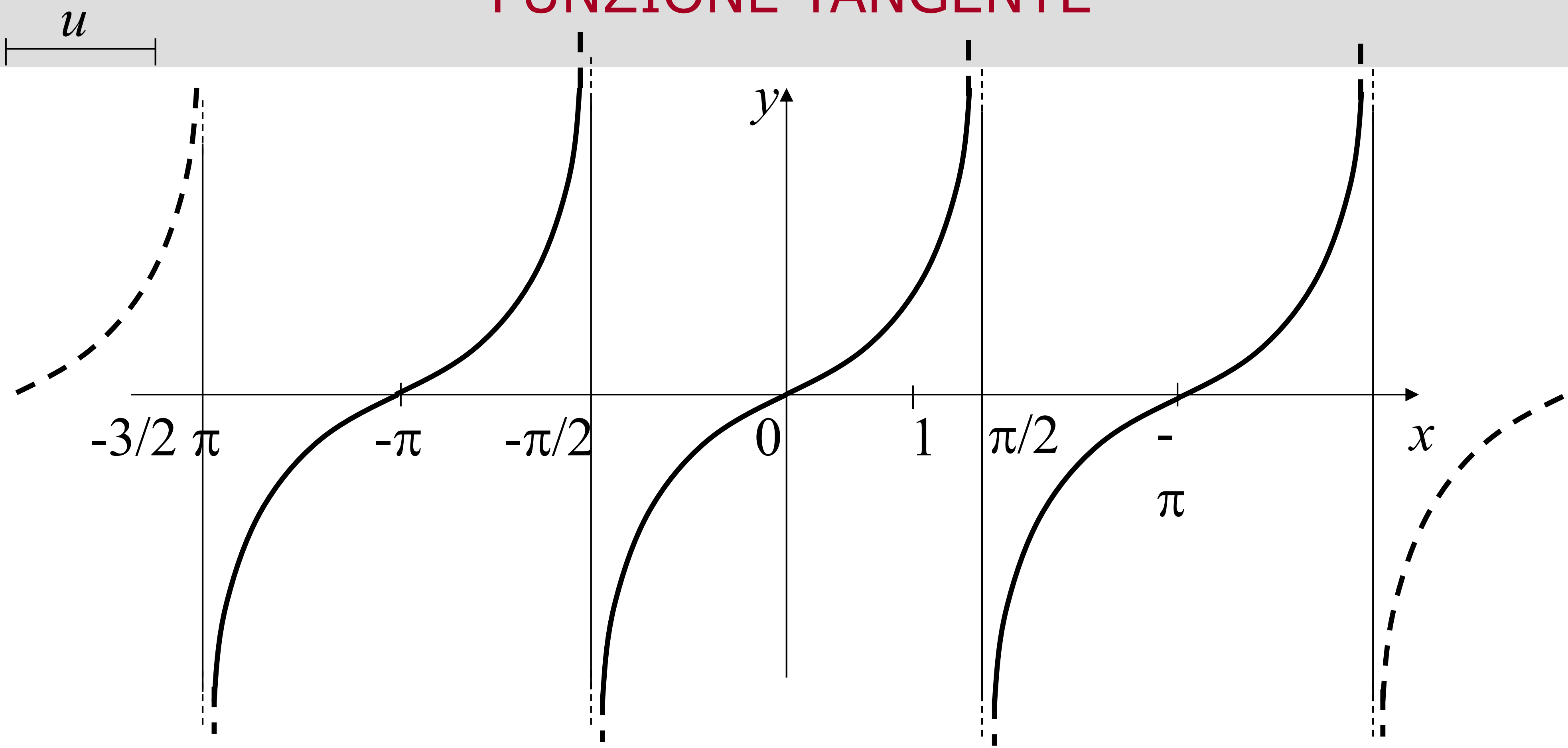
$$\Downarrow$$

la funzione tangente è periodica di periodo π

$$\tan(x+\pi) = \tan x,$$

$$\forall x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in Z \right\}$$

FUNZIONE TANGENTE



$$\sup \ \tan x = +\infty; \inf \ \tan x = -\infty$$

f strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), \forall k \in Z$

f dispari: $-\tan x = \tan(-x)$

OSSERVAZIONE

Abbiamo detto che la

FUNZIONE TANGENTE è strettamente crescente

in ciascuno degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

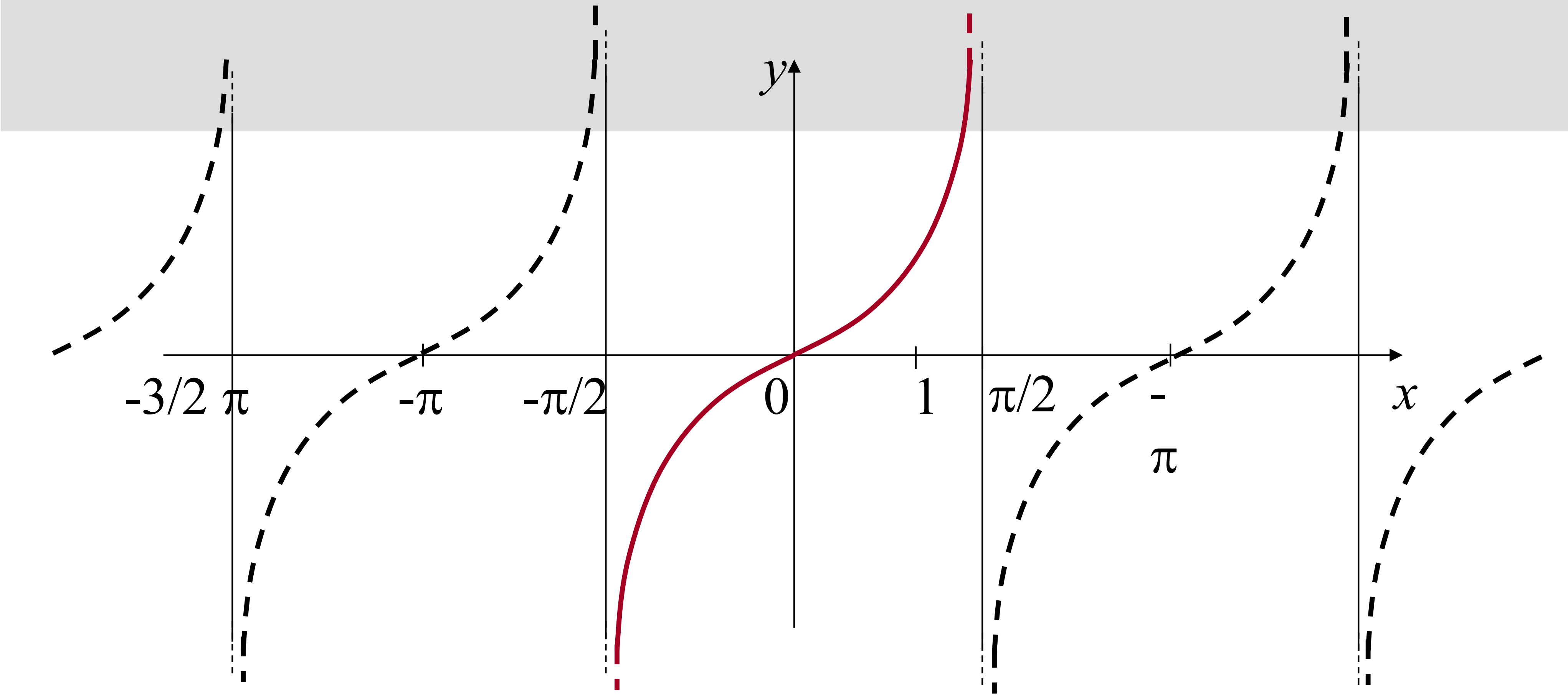
Così, se invece di considerare come dominio tutto

$$R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$$

consideriamo solo una parte di esso e cioè

l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, allora in tale intervallo la

funzione tangente risulta strettamente crescente e quindi invertibile



Prendendo in considerazione tale osservazione, la funzione tangente definita in $R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$

è invertibile nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

e l'inversa della funzione tangente in tale intervallo è detta

FUNZIONE ARCOTANGENTE

FUNZIONE ARCOTANGENTE

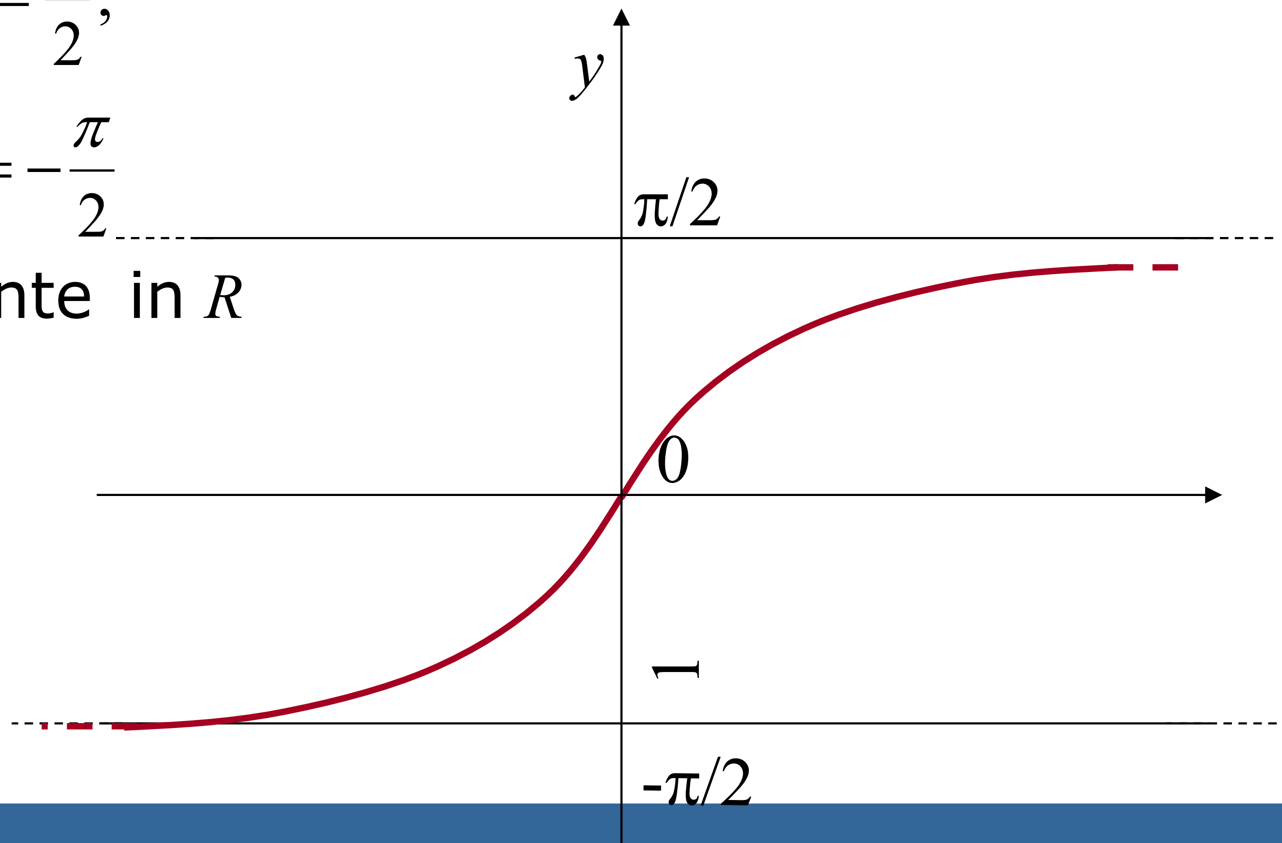
$$f(x) = \arctan x$$

$$f : x \in R \rightarrow \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

f è limitata: $\sup \; \arctan x = \frac{\pi}{2},$

$$\inf \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

f strettamente crescente in R



Relazioni fondamentali fra le diverse funzioni trigonometriche di uno stesso arco orientato:

Tra le funzioni trigonometriche viste intercorre la seguente relazione fondamentale:

$$sen^2 x + \cos^2 x \;= 1$$

$$(teorema \quad di \quad Pitagora)$$