IL caffè SCIENTIFICO DI AGRARIA

Aula Cinese ore 14.30

Ottimizzazione: un processo tra natura e matematica

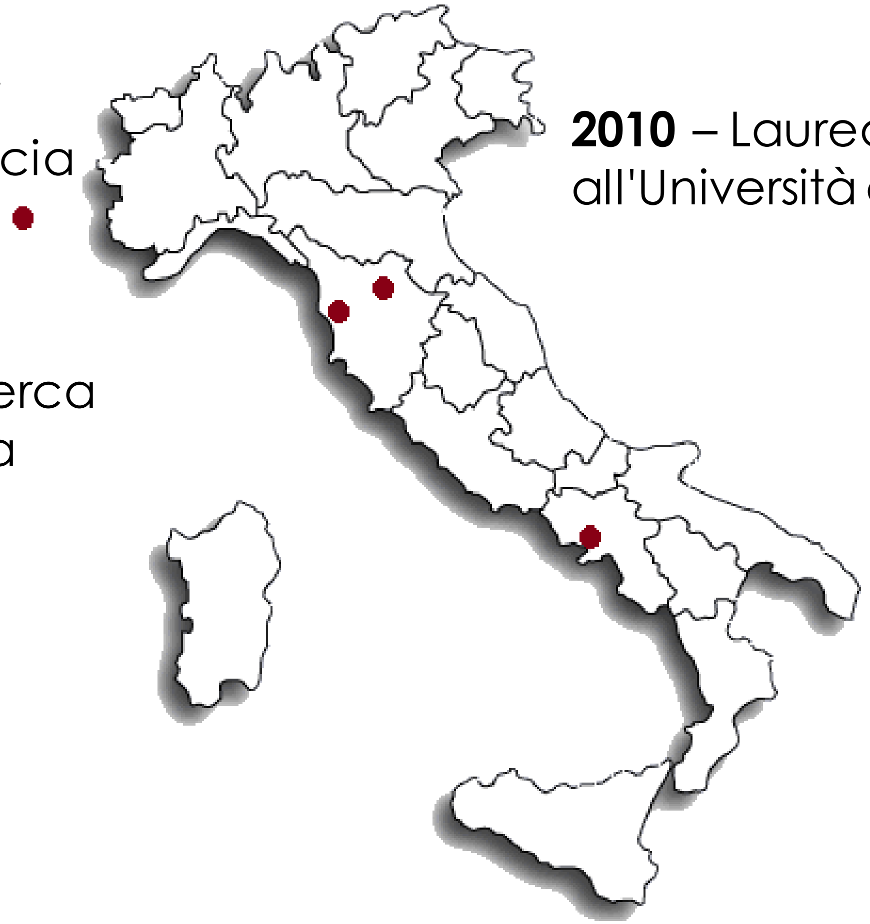
SERENA GUARINO LO BIANCO

20 MAGGIO 2020

La mia storia formativa e professionale

2014 – Grenoble – Borsa di studio Ambasciata di Francia

2014 – Dottorato di ricerca presso Università di Pisa



2010 – Laurea specialistica in Matematica all'Università degli studi di Firenze

2016 – 2019 Post-doc "Federico II" Dipartimento di Matematica

2019 - oggi RTDA SSD MAT/05 dipartimento di Agraria

Ottimizzazione.....

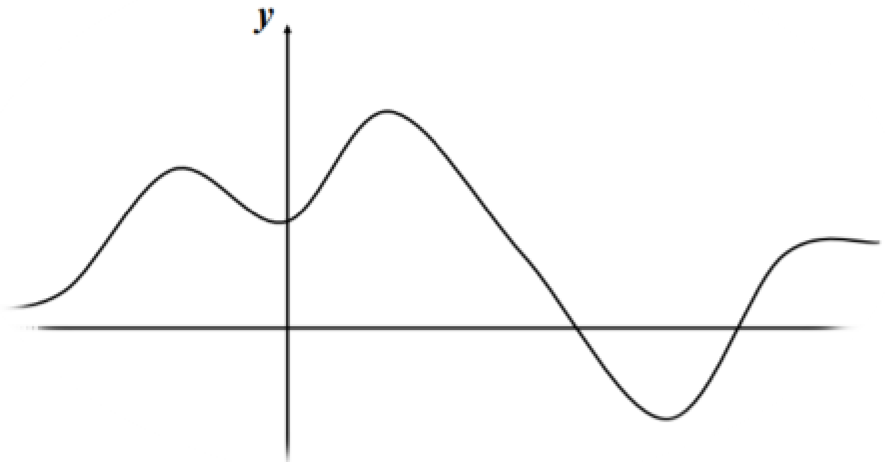
Cosa vuol dire ottimizzare?

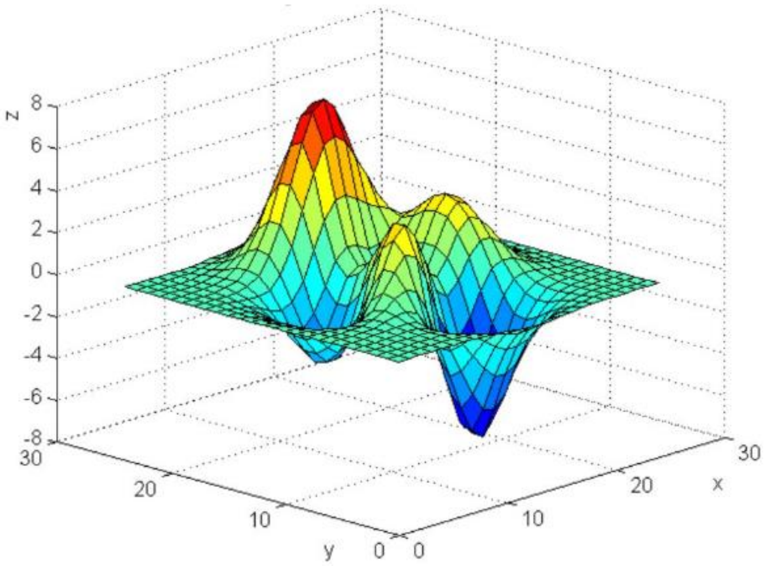
Trovare il <u>miglior</u> modo/ la <u>migliore</u> soluzione ad un problema.

Esempio: **massimizzare** i profitti....

Spendere il **meno** possibile.....

Massimi e minimi

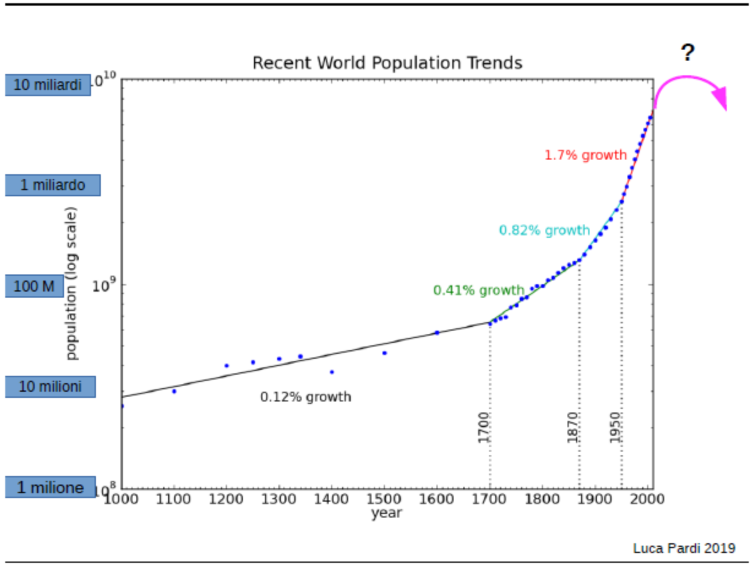


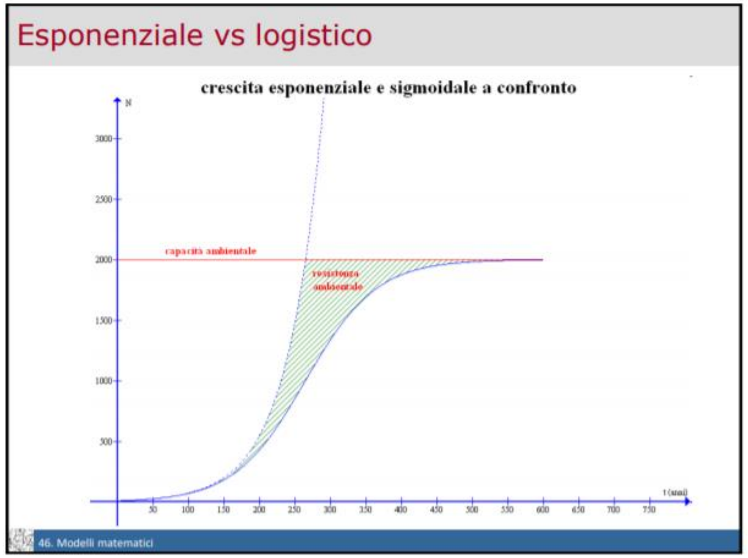


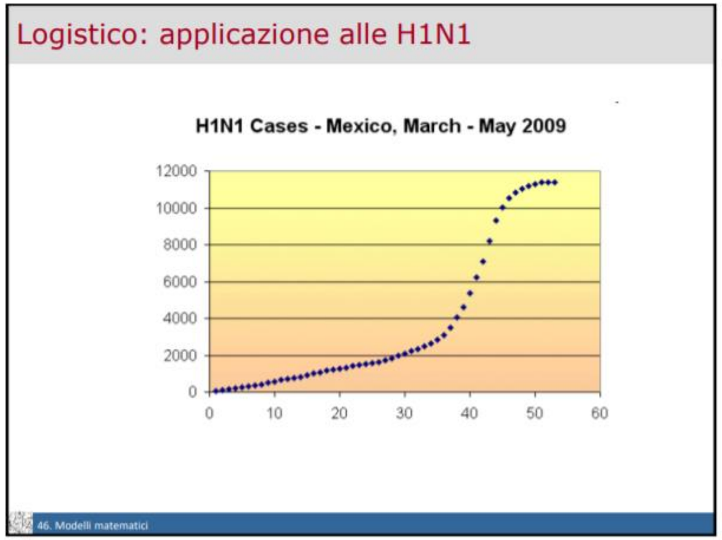
Massimi e minimi ci sono sempre?

Come si trovano?

Esempi e modelli

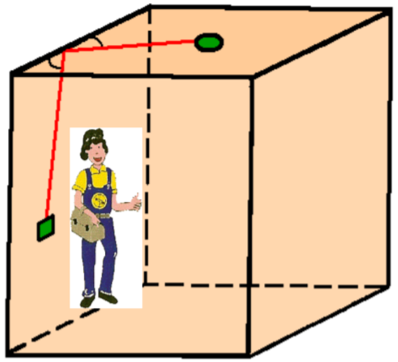


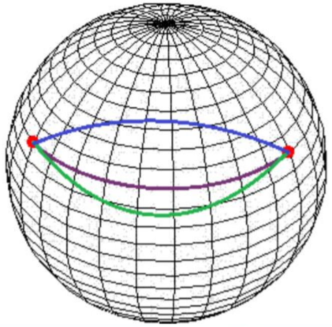


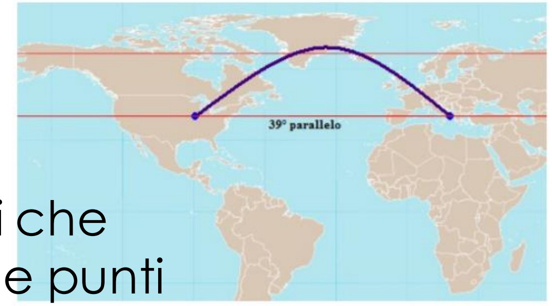


Qualche esempio

Quale inclinazione bisogna dare al cannone in modo che la gittata sia massima?







Fra tutti i percorsi che congiungono due punti assegnati su una superficie, determinare quello che ha lunghezza minima

In un allevamento di polli il mangime viene preparato mescolando tre diversi tipi di cereali. Trovare la combinazione che minimizza i costi fra tutte quelle che rispettano certi requisiti nutrizionali

… e natura.

- **Perchè le bolle di sapone sono tonde?**
- **Perchè le api costruiscono i favi con celle esagonali?**
- **Perchè gli alberi hanno radici e foglie ramificate?**
- **Come si muovono le nuvole?**
- **Come si sciolgono I ghiacci?**

Dimensione finita vs dimensione infinita

Nei grafici/esempi visti fino ad ora la dimesione del problema era finita (finito numero di variabili).

Problema di ottimizzazione di forma / Shape optimization problem

$$\min\left\{F(\Omega)\ :\ \Omega\in\mathcal{A}\right\}$$

Dove l'inseme Ω è in una opportuna classe di insiemi ammissibili.

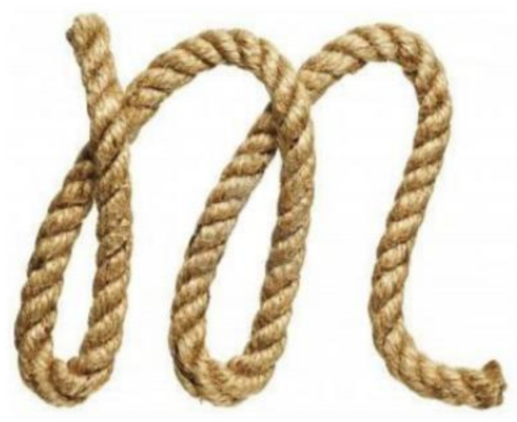
Il problema di ottimizzazione di forma ha dimensione **infinita** e dato che la classe dei domini ammissibili **non ha strutture** vettoriali, è difficile applicare i metodi tradizionali.

Il problema di Didone

Il primo problema di ottimizzazione è contenuto nella leggenda della fondazione dell'antica Cartagine da parte di Didone, raccontata nel I libro dell'Eneide.

Nell'880 a.C. la regina fenicia Didone approdò sulle coste settentrionali dell'Africa.

Qui chiese al re locale un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città. Il re, in tutta risposta, le offrì una pelle di toro dicendole che poteva appropriarsi di tanto terreno quanto poteva comprenderne con quella pelle ("quanto cerchiar di bue potesse un tergo").



Il problema isoperimetrico

Didone **intuì** qual era il modo di mettere la corda per racchiudere più area possibile

Fra tutte le figure piane di egual perimetro, anche non poligonali, determinare quella avente area massima.

Fra tutte le figure piane di area fissata, determinare quella di perimetro minimo.

Soluzione del problema isoperimetrico.

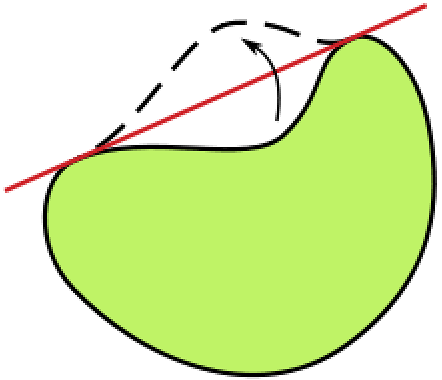
I greci antichi avevano intuito che la soluzione del problema isoperimetrico è il cerchio. Ma per avere le prime dimostrazioni rigorose bisogna attendere i primi anni del XX secolo.

Circa 1840 – Steiner -> dimostrazione in dimensione 2 (quasi corretta)

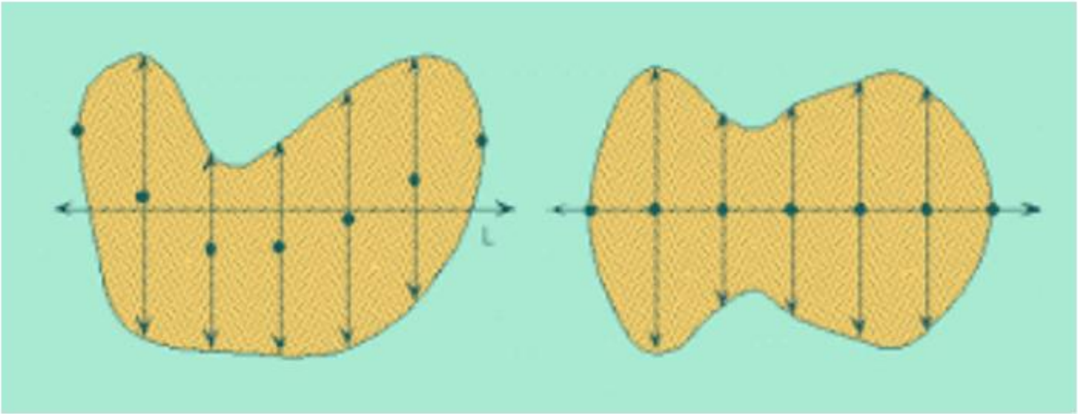
Fine della storia: **1958 – E. De Giorgi** - Dimostroò che " tra tutti gli insiemi n-dimensionali aventi “perimetro di De Giorgi” assegnato, quella avente “misura di Lebesgue” massima è la sfera n-dimensionale."

Una idea della dimostrazione

Possiamo intanto ridurci alla classe degli insiemi convessi....



Poi l'idea è quella di rendere l'insieme sempre più "simmetrico" fino a farlo diventare un cerchio



La natura conosceva la soluzione

Le bolle di sapone minimizzano l'energia di tensione superficiale.

Fissata la quan
tità di
aria racchiusa
dalla bolla...

Passando dalle "formule" si può capire che la stessa cosa vale anche per i cristalli che hanno una loro energia di tensione.

Gibbs (1878) e Wulff (1901)

Le api scelgono la soluzione più economica

Variante del problema:

Quale figura di area fissata tassella lo spazio in modo da usare meno perimetro?

Anche qui la natura conosce bene la soluzione

Dimostrazione rigorosa.....

1)Fra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso num ero di lati, quello che ha area massima è quello **regolare**

2) Hales (2001) prova la honeycomb conjecture

3) Morgan e Bolton(2002): risultato degli esagoni relazionato al problema di posizionamento (tra poco...)

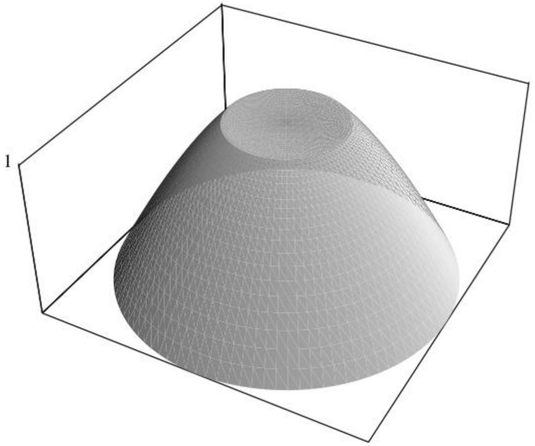
Il problema di Newton di minima resistenza aerodinamica

Edmund Rumpler's 1921 Tropfenwagen was the first series-produced aerodynamically designed automobile, before the Chrysler Airflow and the Tatra 77.

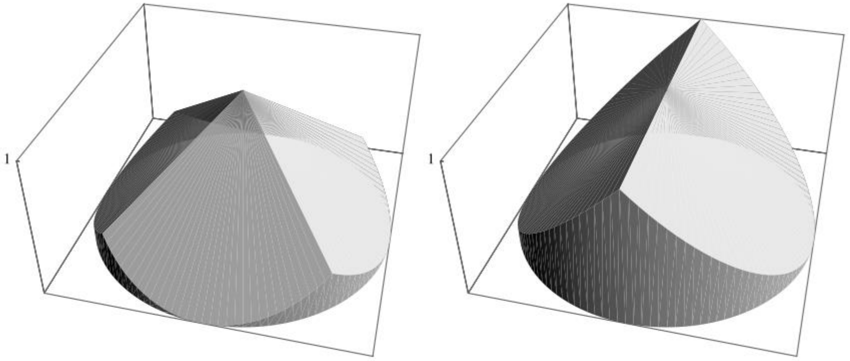
Problema: trovare la forma del corpo che muovendosi in un fluido ha la minima resistenza al moto.

Newton (1685) - la pressione è proporzionale al sin^2 x, con x l'angolo tra il profilo dell'oggetto e il flusso del fluido.

$$\min\left\{F(u)\ :\ 0 \le u \le M,\ u \text{ concave on } D\right\}.$$



The optimal radial shape for $M = R$.



(c) pyramid 1, (d) pyramid 2.

Ad oggi si sa:
- che una soluzione esiste ma non è unica;
- non è radiale;

Il trasporto ottimale

1781 – G. Monge pubblica "**Memoire sur la theorie des deblais et des remblais**"

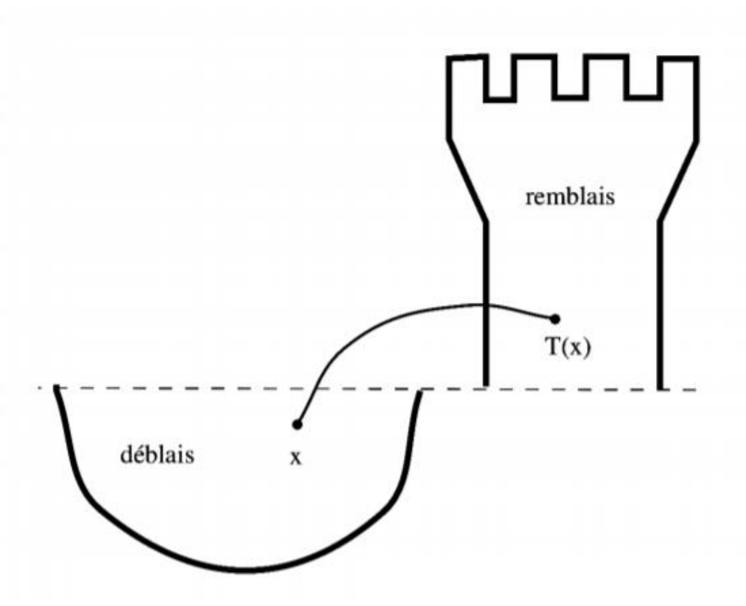
Deblais: materiale estratto dal terreno o da una miniera

Remblais: materiale usato in una costruzione

Monge lavorò per Napoleone che voleva

costruire fortificazioni.

Il problema di trasporto



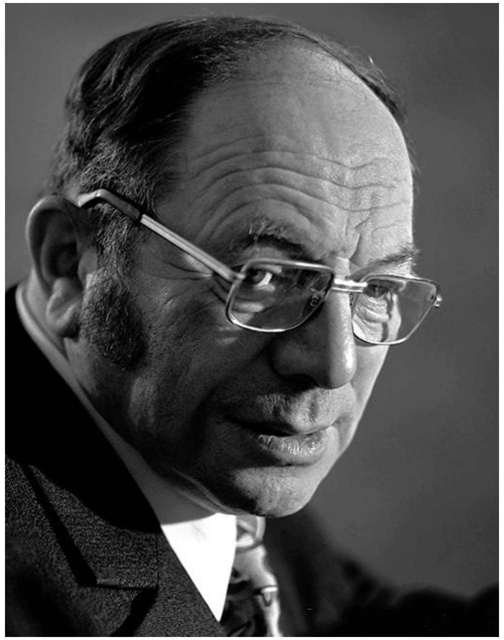
Problema: estratta dal terreno una certa quantità di materiale, la si vuole trasportare dal luogo di scavo a quello di utilizzo per costruire fortificazioni.

Domanda: come decidere dove trasportare il materiale in modo da "minimizzare" il costo di trasporto complessivo?

Costo di Monge = distanza

Un problema lungo da risolvere

Negli anni 1940 L. Kantorovich studiò il problema di Monge e lo riformulò in termini economici



Kantorovich vinse il premio Nobel per l'economia nel 1975

Ancora poca matematica..... negli anni 80, grazie ai lavori di Brenier e altri, si iniziò a studiare approfonditamente il problema di Monge

Domande naturali:

- esiste un trasporto ottimale?
- Se sì, possiamo capire come è fatto?

Il costo e altre variabili

Per Monge il costo era $c(x,y) = |x-y|$

In molte applicazioni è interessante $c(x,y) = \frac{1}{2} |x-y|^2$

Anche la geometria dello spazio gioca un ruolo (valli, laghi, ostacoli, autostrade)

Esempi in natura...

In un albero si fa un "trasporto ottimale" prendendo risorse dal terreno e facendole arrivare alle foglie.

Applicazioni

- ottimizzazione di forma e di densità per strutture elastiche;
- ottimizzazione di reti di trasporto;
- problemi di pianificazione urbana;
- problemi di posizionamento e di irrigazione;
- modelli di traffico con effetti di concentrazione e di congestione;
- curve nello spazio delle misure ed applicazioni al movimento di una folla.

Il problema di posizionamento (location)

Regione Ω in cui c'è una densità di popolazione f^+

Si vogliono posizionare n punti in un opportuno modo ottimale, cioè minimizzare

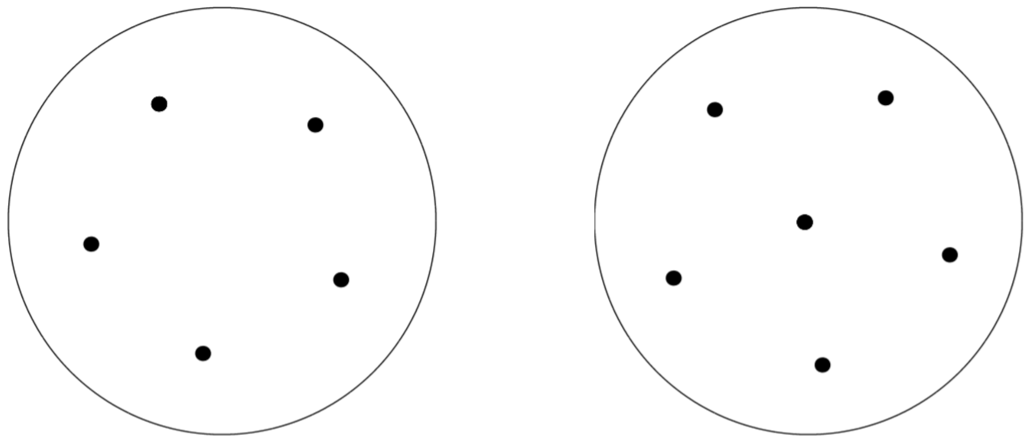
$$F(\Sigma) = \int_\Omega \operatorname{dist}(x, \Sigma)\, df^+(x).$$

Dove Σ è l'insieme di n punti.

L'ottimo posizionamento è quello in cui la popolazione raggiunge i punti di distribuzione in modo da minimizzare la distanza media che i residenti devono percorrere per raggiungere il punto di Σ pi`u vicino.

La soluzione del problema di location

L'esistenza è facile in questo caso.... con molti strumenti matematici.

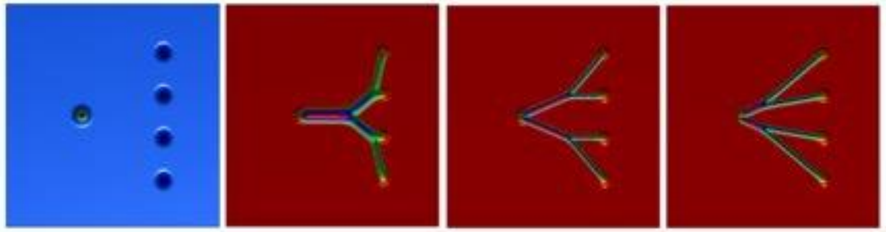


Posizionamento ottimo di 5 e 6 punti in un disco per $f^+ = 1$.

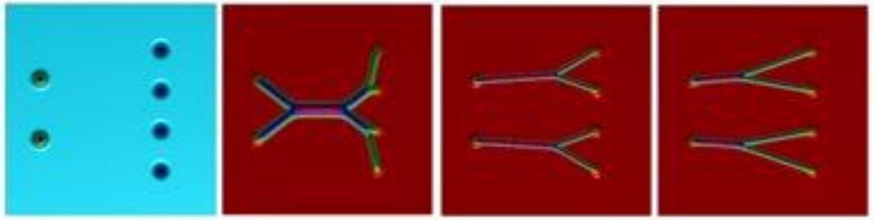
Il trattamento numerico dei problemi di posizionamento `e molto complesso, a causa del gran numero di minimi locali del funzionale F(Σ) nella classe considerata.

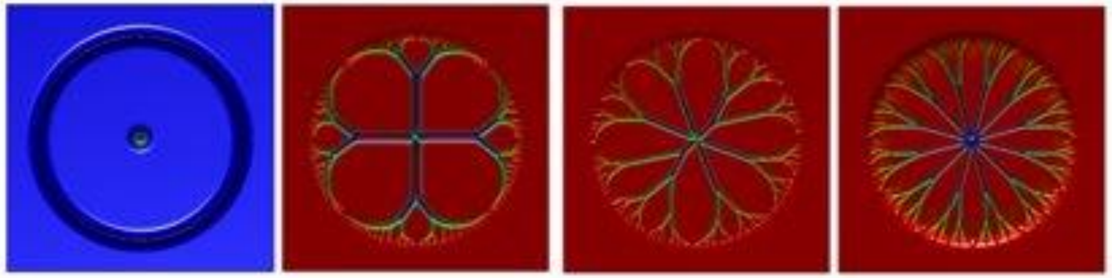
Tecniche probabilistiche e di convergenza....

Il problema dell'irrigazione



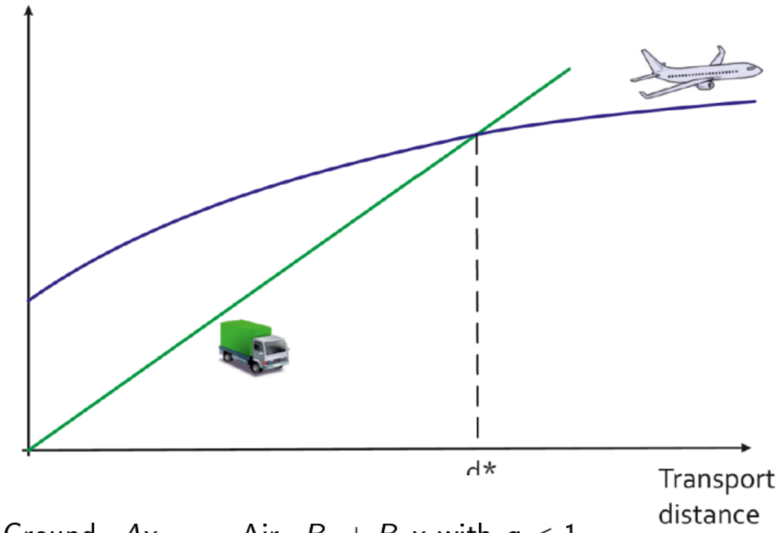
"Irrigation" con diverse funzioni costo





Una variante: location + routing

In *G. Buttazzo, S. Guarino Lo Bianco, F. Oliviero, Optimal location problems with routing cost, Discrete Contin. Dyn. Syst. (2014)* abbiamo studiato una variante del problema di location



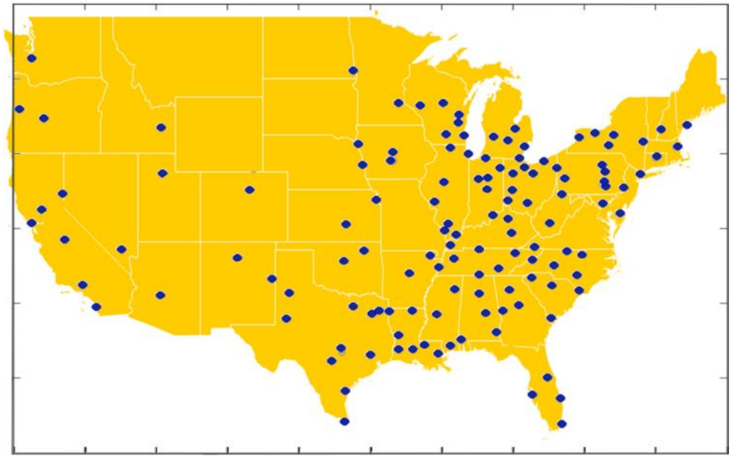
Ground$=Ax$, Air$=B_0 + B_1 x$ with $q < 1$

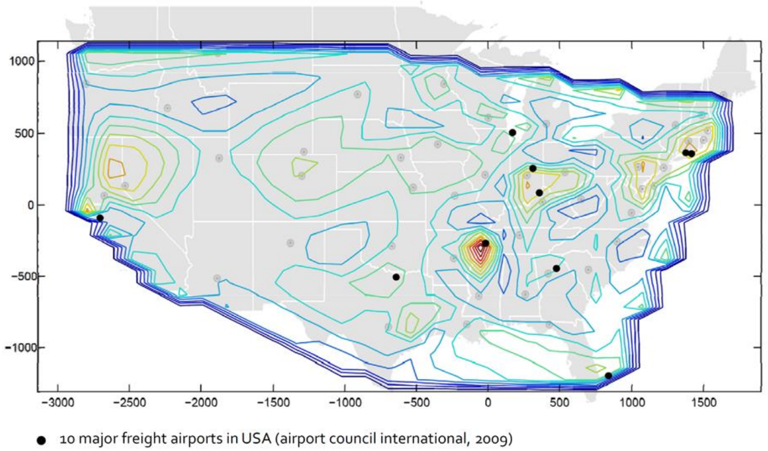
$$F_\varepsilon(\mu) = \varepsilon \int_\Omega \frac{\rho(x)}{\mu(x)^{p/d}} dx + \int_{\Omega\times\Omega} |x-y|^q d(\mu \otimes \mu)$$

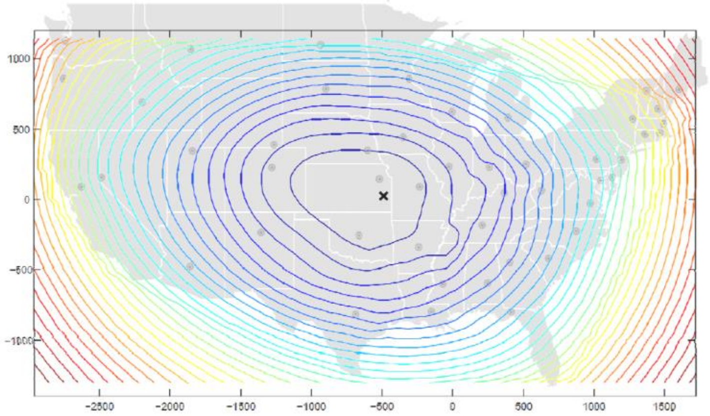
with $\varepsilon = AC_{p,d} N^{-2-p/d} / B$

Location + routing: applicazione

Risultati







Altra variante: la congestione

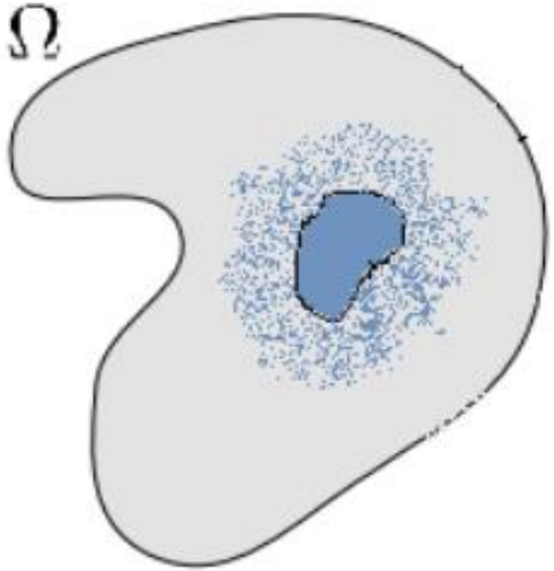
Gli effetti della congestione sono stati molto studiati fin dagli anni '50 da Wardrop (per il caso discreto) e Beckmann (per quello continuo).

In *G. Buttazzo, G. Carlier, S. Guarino Lo Bianco, Optimal Regions for Congested Transport, ESAIM (2015)* abbiamo studiato un modello di traffico congestionato in cui è presente una regione a "bassa congestione".

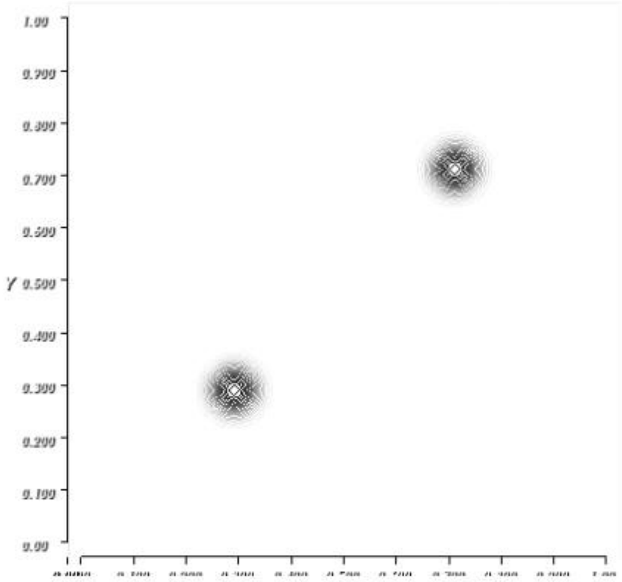
$$\min\left\{\int_{\Omega\setminus C} H_2(\sigma)\,dx + \int_C H_1(\sigma)\,dx + m(C) \ :\ -\operatorname{div}\sigma = f \text{ in } \Omega,\ \sigma\cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\right\}$$

Qualche risultato

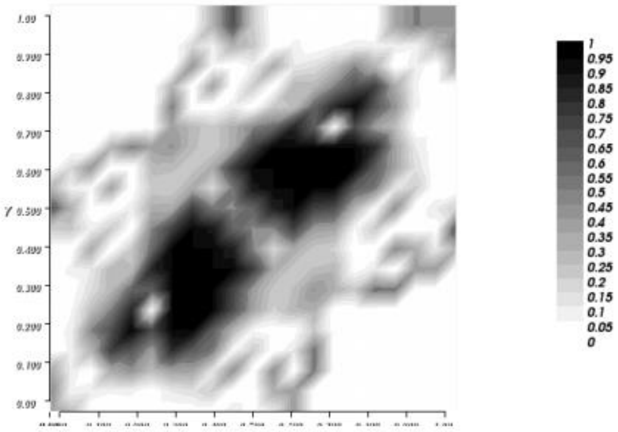
Ci aspettiamo....



Abbiamo simulato....



(c) $\lambda = 0.001$



(d) $k = 0.01$

Qualche referenza

- G. Buttazzo: Problemi di ottimizzazione in teoria del trasporto di massa (available on cvgmt.it)
- D. Bucur, G.Buttazzo : Variational Methods in Shape Optimization Problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Application (2005)

- …… e tutte le moltissime referenze in questi lavori di A.Figalli, F.Santambrogio, G.Carlier, A.Pratelli ecc

- *G. Buttazzo, S. Guarino Lo Bianco, F. Oliviero, Optimal location problems with routing cost, Discrete Contin. Dyn. Syst. (2014)*
- *G. Buttazzo, G. Carlier, S. Guarino Lo Bianco, Optimal Regions for Congested Transport, ESAIM (2015)*

Prossimo appuntamento

Mercoledì **3 Giugno** 2020 ore 14.30

VIRGINIA LANZOTTI

Chimica organica e Agraria: più vicine di quanto sembri