Vettori e operazioni sui vettori

Dipartimento di agraria, Napoli – 16/09/20

Mario Merola (C.d.L. Tecnologie Alimentari e Scienze Agrarie, Forestali ed Ambientali)

Slides a cura del Prof. Luigi Cappiello

Vettori e Scalari

- **Vettori**
  - **Spostamento**
  - Velocità
  - Accelerazione
  - Forza
  - Quantità di moto

- **Scalari:**
  - **Distanza**
  - Temperatura
  - Massa
  - Energia
  - Tempo

Per descrivere un vettore occorrono più informazioni che per uno scalare

Grandezze Vettoriali: spostamento

- siamo a Napoli
- ci spostiamo di 190 km
- dove ci troviamo?

la nostra nuova posizione è indeterminata !

Sappiamo solo che siamo ad una **distanza** di 190km da Napoli

Grandezze Vettoriali: spostamento

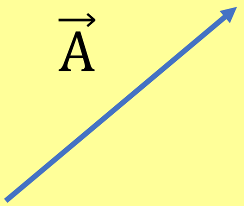
Occorre conoscere:

- **entità** spostamento: **distanza (modulo)**
- **direzione** spostamento
- **verso** spostamento

Nota sulla notazione

- Per descrivere un vettore si usa:
  - o il carattere grassetto: vettore **A**
  - oppure una freccia sul vettore $\vec{A}$

  Per indicare il modulo del vettore si può semplicemente eliminare la freccia ad es A, o usare la notazione $|\vec{A}|$

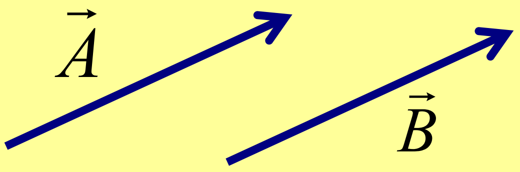


Il modulo di un vettore è un numero reale positivo moltiplicato per le unità di misura della grandezza vettoriale.
(Per lo spostamento il modulo è espresso in unita' di lunghezza, ad esempio in kilometri)

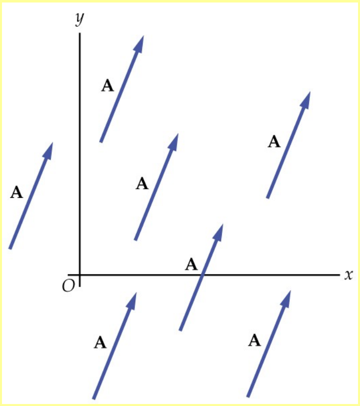
Disegnare un vettore: la freccia indica la **direzione** ed il **verso** del vettore, la sua lunghezza indica il modulo

Proprietà geometriche dei vettori

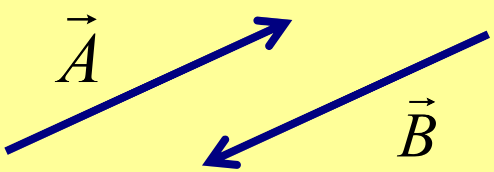
- Uguaglianza tra due vettori
  - Due vettori **A** e **B** sono uguali se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso



- Nota che: se spostiamo un vettore **A** parallelamente a sé stesso, nessuna delle sue proprietà cambia



- Due vettori **A** e **B** sono detti opposti e si scrive **B = -A** se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione, ma verso opposto (vedremo che la somma di due vettori opposti è il vettore nullo **0**, di modulo 0)



Prodotto di un vettore per uno scalare

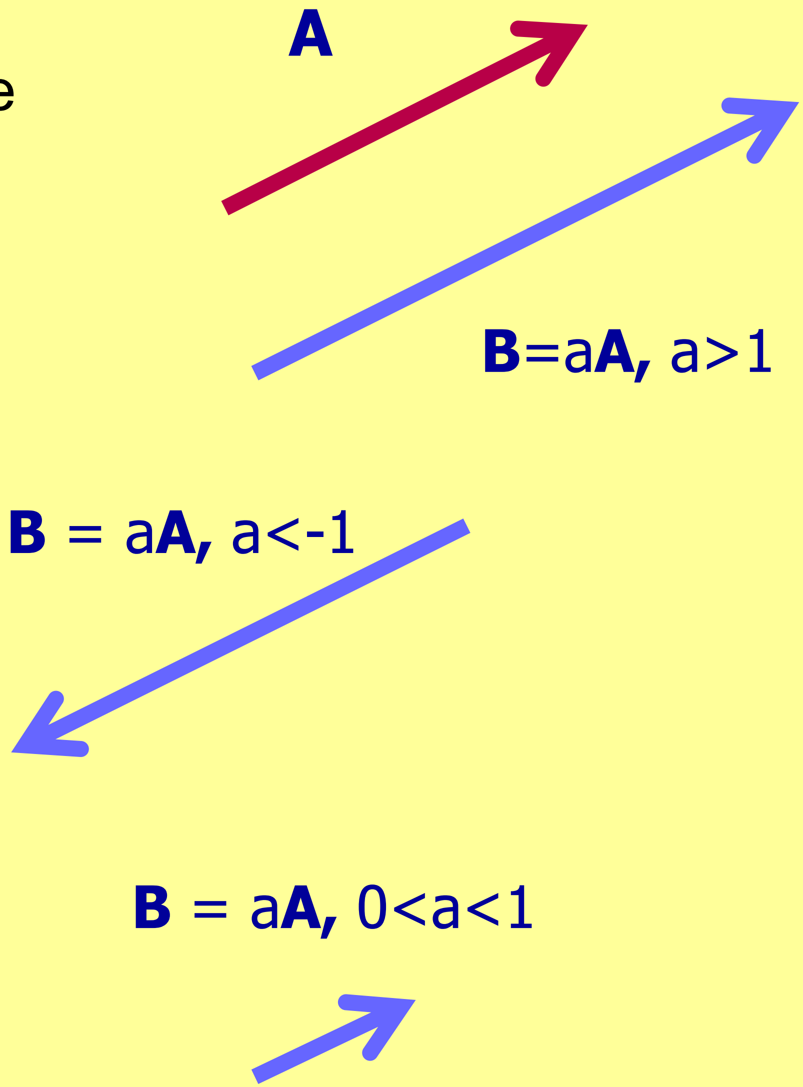
- Il prodotto di un vettore **A** per uno scalare a (un numero reale per le sue unità di misura) è un nuovo vettore

B = a**A**

- di modulo |**B**| = |a| |**A**|
- di direzione uguale a quella di **A**
- di verso:

  uguale a quello di **A**, se a>0

  opposto a quello di **A**, se a<0



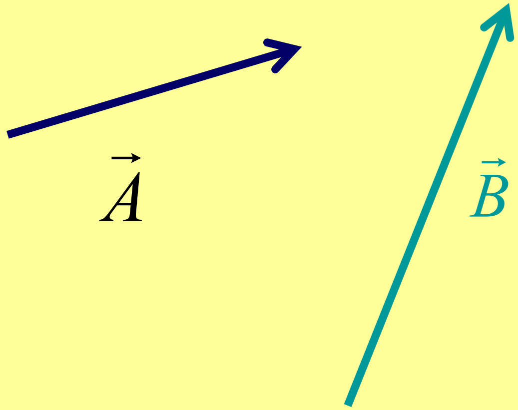
Nota che

Se |a|>1 allora |**B**|>|**A**|,

Se |a|<1 allora |**B**|<|**A**|

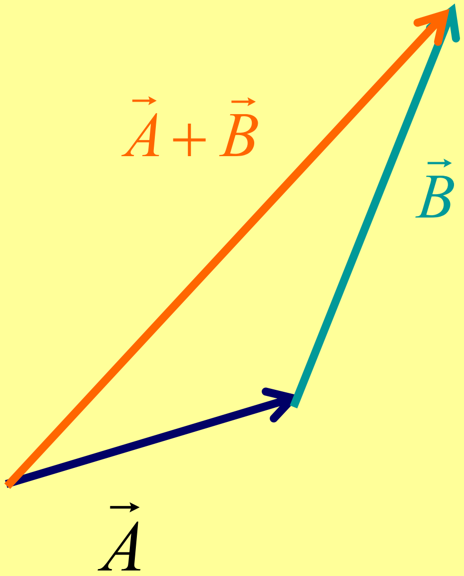
Somma di Vettori: metodo I

- Disegnare i due vettori **A** e **B** con loro modulo, direzione e verso



- Trasportare parallelamente i vettori **A** e **B** in modo da portare l’origine di **B** nel punto individuato dalla punta del primo vettore **A**

- Il vettore risultante **C=A+B** è diretto dall'origine del primo vettore alla punta del secondo



Nota che si ottiene lo stesso vettore da **C=B+A**

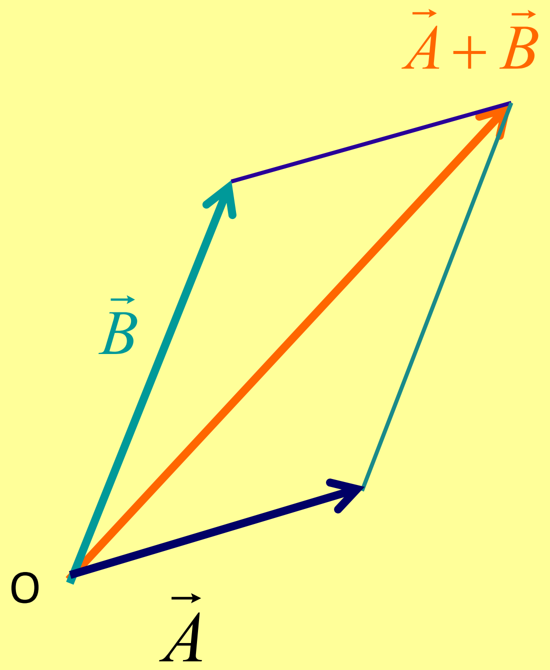
Somma di due vettori con il metodo del parallelogramma

- Disegnare il primo vettore vettore **A** a partire da un punto origine O

- Disegnare il secondo vettore **B** a partire dalla stesso punto origine O

- Disegnare il parallelogramma di cui **A** e **B** sono due lati

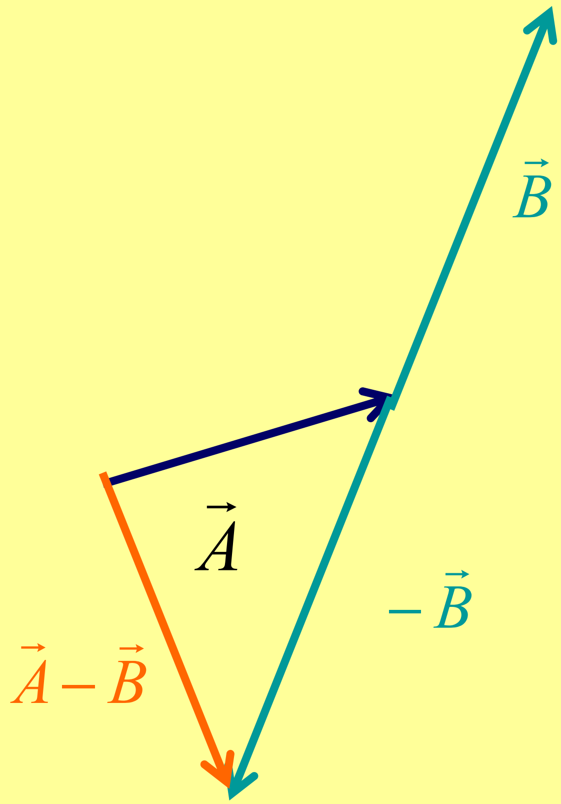
- Il vettore risultante dalla somma di **A** e **B** parte da O ed è diretto lungo la diagonale del parallelogramma. Il risultato della somma non dipende dall'ordine dei due vettori sommati **A+B = B+A**



Sottrazione tra due vettori

- Si riconduce all'addizione tra il primo vettore ed il vettore opposto del secondo
  - sommare al primo vettore **A** il vettore **-B**, cioè il vettore opposto a **B**

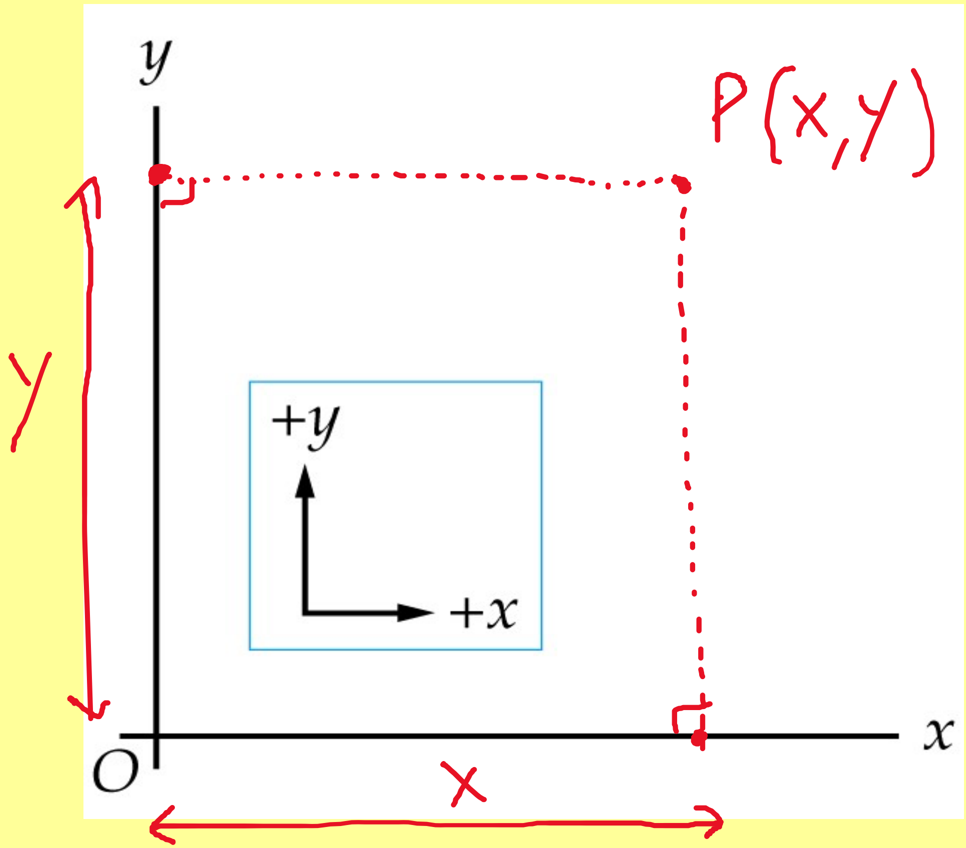
$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + \left(-\vec{\mathbf{B}}\right)$$



Rappresentazione di vettori in un piano

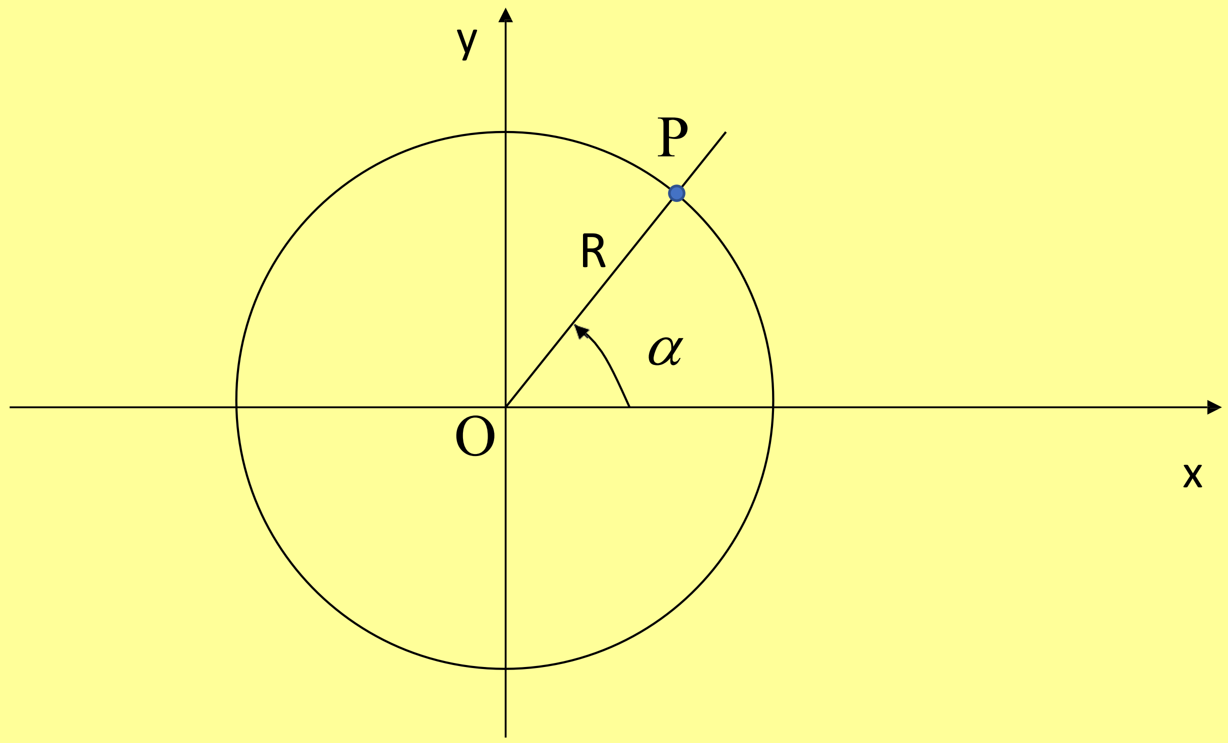
Sistema di riferimento cartesiano

Un punto P è rappresentato da una coppia di coordinate (x,y) che ne individuano univocamente la posizione.

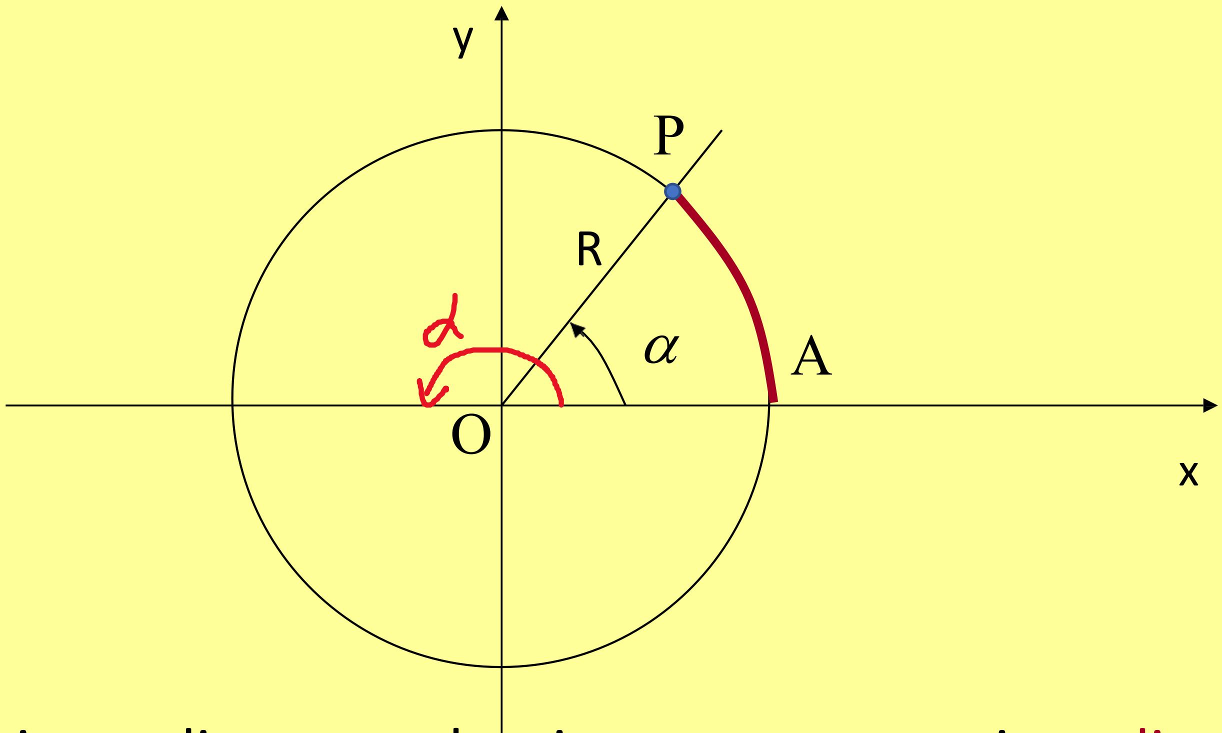


Richiami geometria e trigonometria

Definizione di angolo in radianti



Definizione di angolo in radianti



Def. La misura di un angolo piano α espressa in radianti è data dalla lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ di circonferenza goniometrica intercettato dalle due semirette che individuano l'angolo stesso, diviso il raggio della circonferenza

In formule $\alpha = \dfrac{\widehat{AP}}{R}$

$$\alpha = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

$\Downarrow$

Da tale definizione segue immediatamente che:

Angolo giro misura in radianti 2π $360°$

(è uguale alla lunghezza dell'intera circonferenza diviso il raggio $2\pi R / R$)

Angolo piatto misura π $180°$

(è uguale alla lunghezza di metà circonferenza diviso il raggio $\pi R / R$)

Angolo retto misura in radianti $\pi/2$ $90°$

Si passa dai gradi ai radianti con la seguente proporzione:

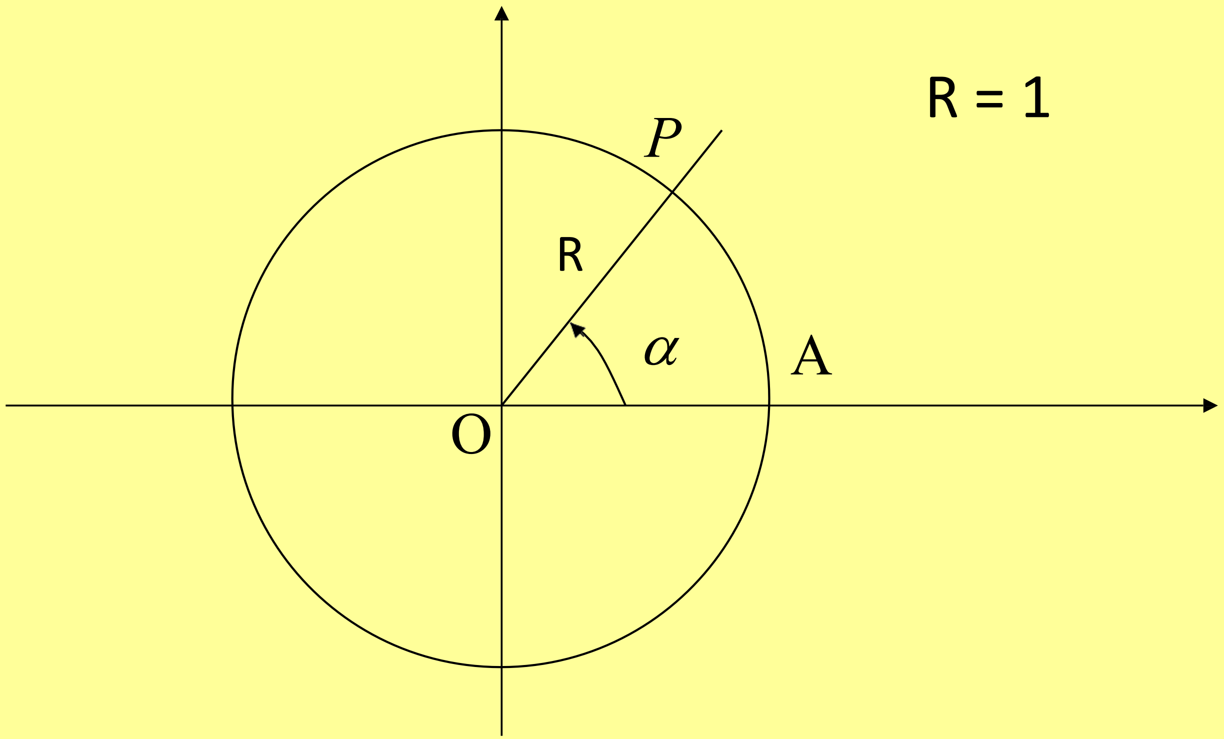
$$\alpha^{\circ} : 180^{\circ} = \alpha^{\text{rad}} : \pi$$

$$\left[\ \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\alpha^{rad}}{\pi}\ \right]$$

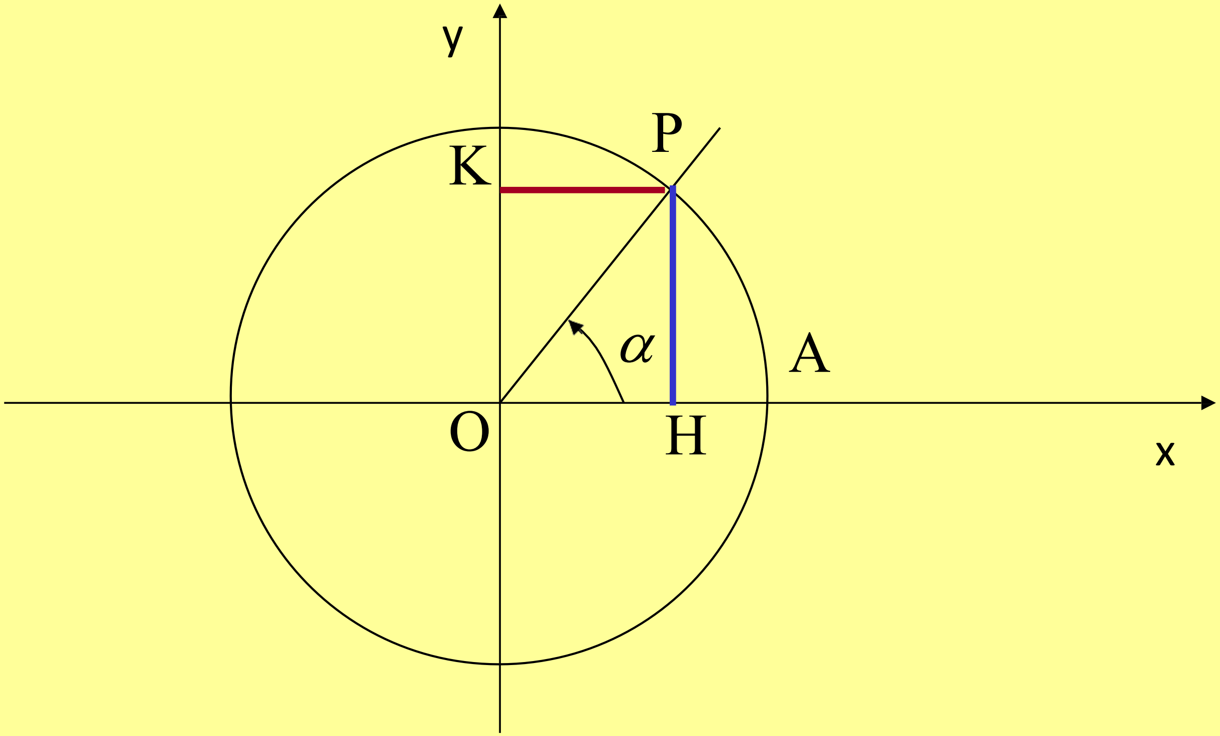
Con successive suddivisioni si verifica che:

gradi	radianti
360°	$2\ \pi$
180°	π
90°	$\pi/2$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
30°	$\pi/6$
120°	$2/3\ \pi$
270°	$3/2\ \pi$

Funzioni seno e coseno



Sia dato un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica (di raggio unitario) a partire dal punto A e sia α l'angolo sotteso dal punto P

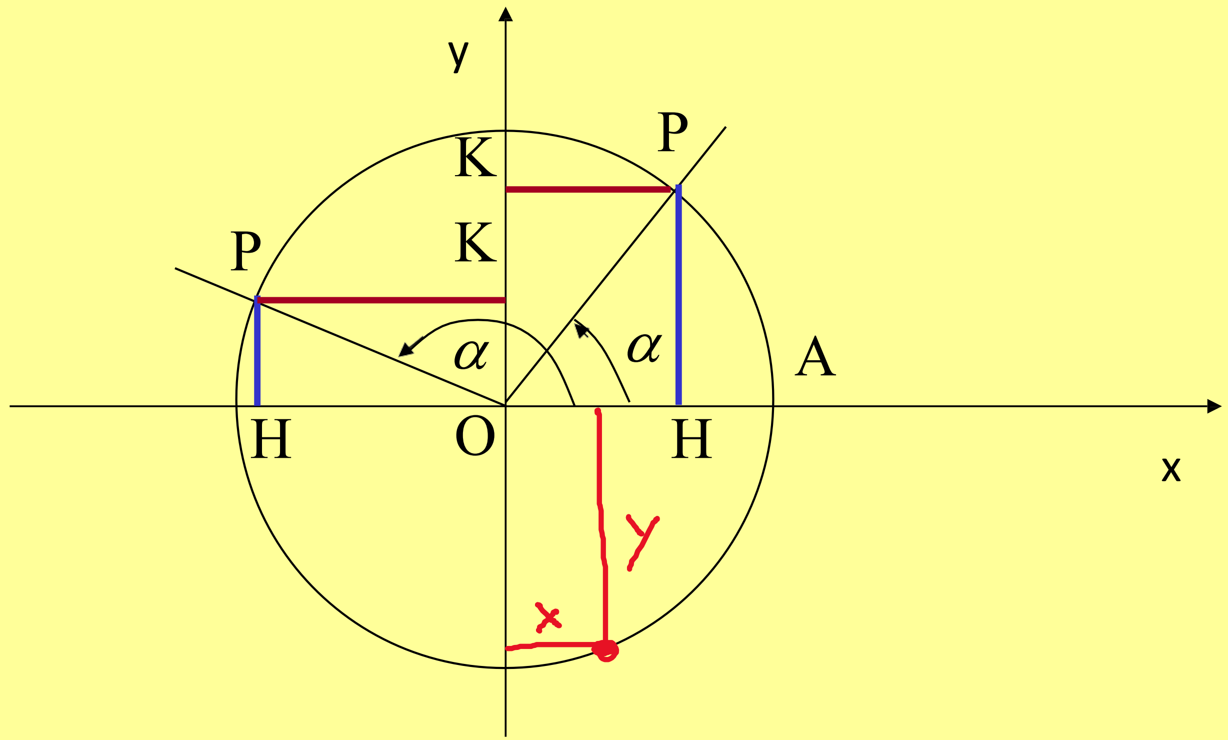


Def. Si definisce $sen\alpha$ l'ordinata del punto P

(cioè il segmento PH)

Def. Si definisce $cos\alpha$ l'ascissa del punto P

(cioè il segmento PK)

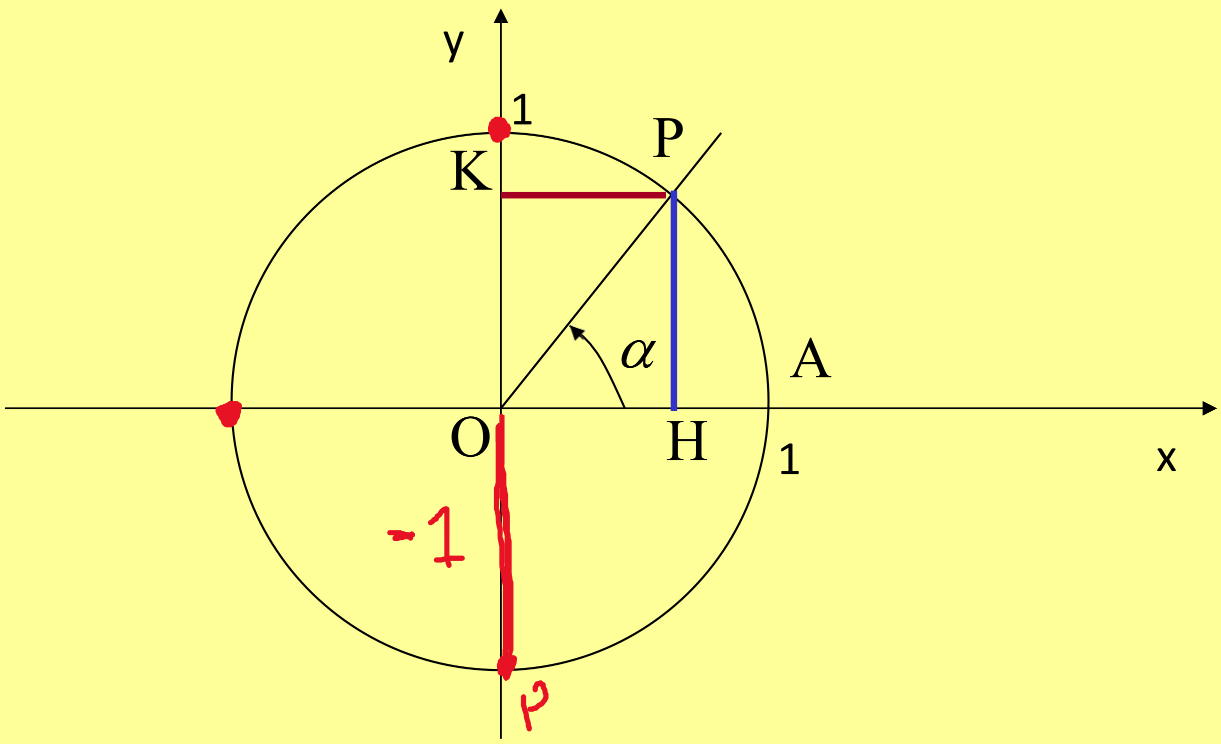


Quando il punto P si muove sulla circonferenza goniometrica variano:

- l'ampiezza dell'angolo α sotteso dal punto P
- l'ascissa e l'ordinata del punto P

Al variare di α variano i valori di senα e cosα: sono funzioni dell'angolo α

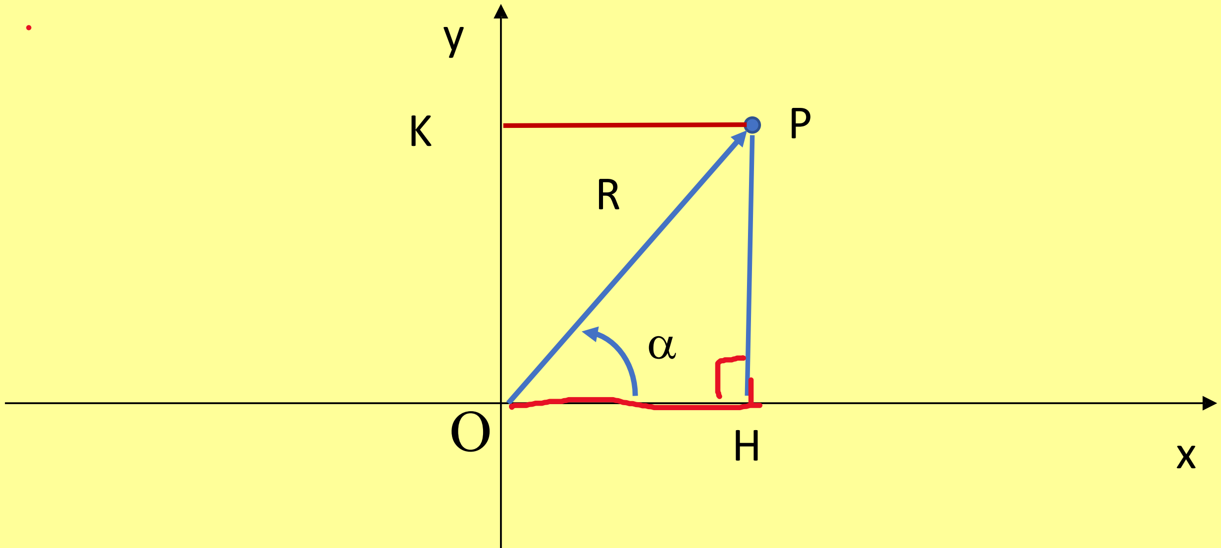
FUNZIONI SENO E COSENO



Il seno e il coseno possono assumere tutti i valori compresi tra -1 e 1

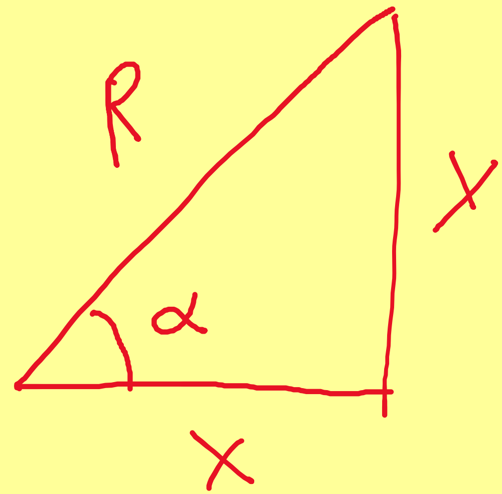
Sono funzioni periodiche di periodo 2π

Coordinate di un punto P in termini dell'angolo (coordinate polari)



$$Y_P = \underline{PH} = R \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

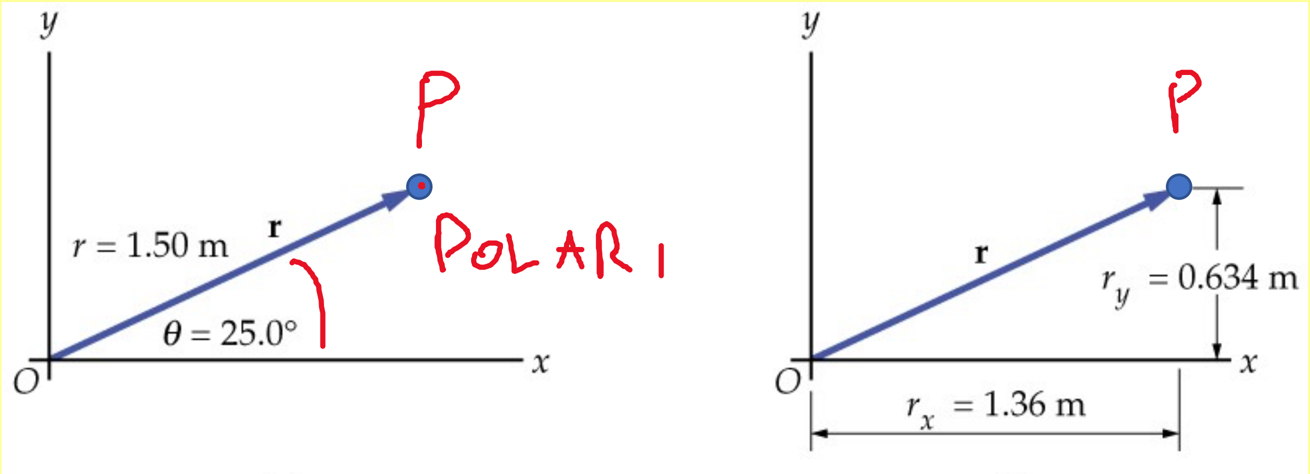
$$x_P = PK = R \cdot \cos\alpha$$



$Y = R \operatorname{sen} \alpha \qquad X = R \cos \alpha$

Vettori in un piano

Esempio: Spostamento: lunghezza, direzione e verso fissati



Lo spostamento è univocamente determinato dalla sua lunghezza (in metri) e dall'angolo rispetto ad una direzione fissata (ad es. la direzione del semiasse x positivo di un sistema di riferimento, con origine nel punto di partenza).

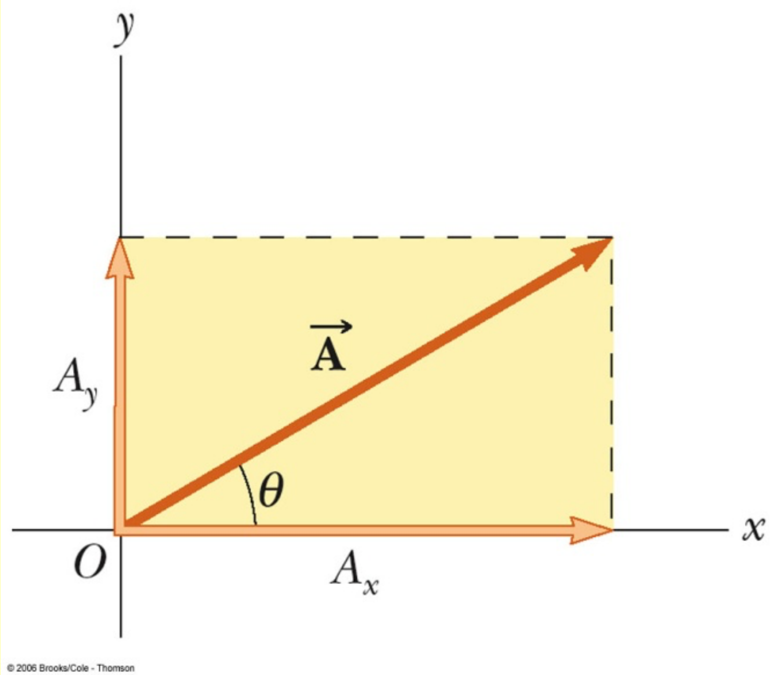
Nell'esempio in figura lo spostamento e' di 1.5 m con un angolo di 25° rispetto all'asse x

Ma lo stesso punto di arrivo può essere descritto dalle sue coordinate cartesiane x=*1.36 m*, y= *0.634 m*.

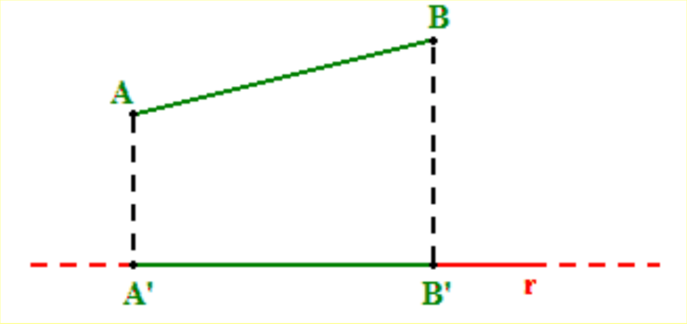
Componenti di un vettore

- Una **componente** è una parte di un vettore.
- In un piano cartesiano, dati i due assi ortogonali x e y, ogni vettore **A** può essere scritto in modo unico come somma di due vettori $\mathbf{A_x}$ e $\mathbf{A_y}$, ciascuno diretto lungo una delle due direzioni

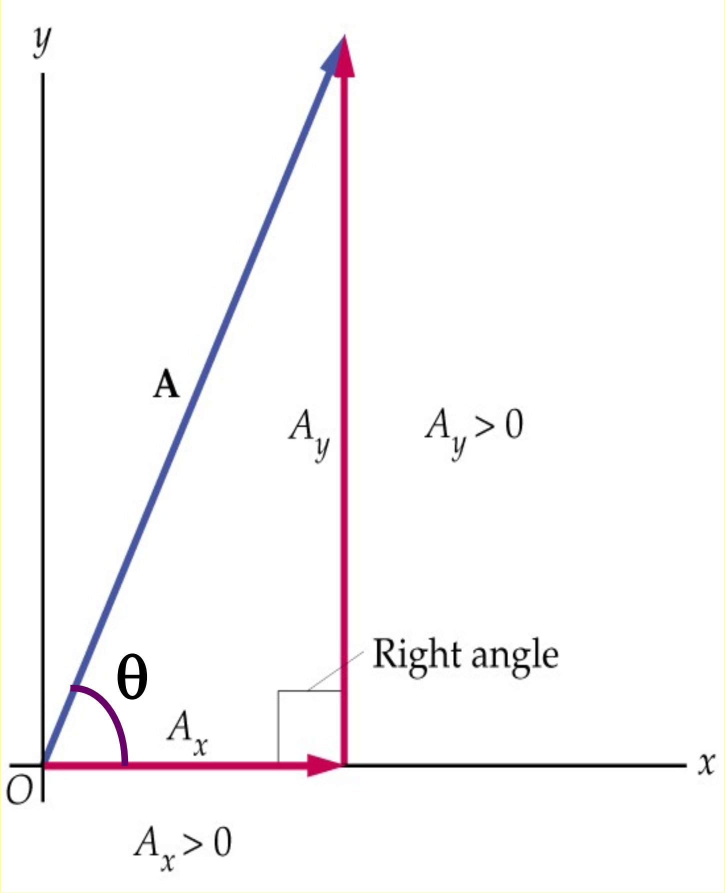
$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}}$$



Richiamo: la proiezione ortogonale di un segmento AB su una retta r è il segmento sulla retta individuato dalle proiezioni ortogonali degli estremi del segmento AB



Componenti cartesiane di un vettore usando la trigoniometria



- Componente x = proiezione del vettore sull'asse x

$$A_x = A\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{A_x}{A}$$

- Componente y = proiezione del vettore sull'asse y

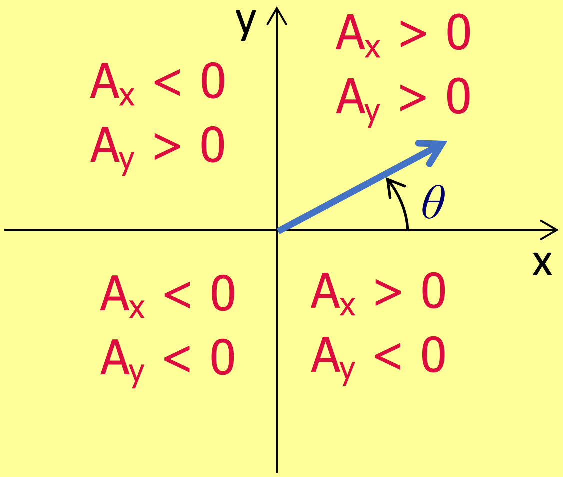
$$A_y = A\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{A_y}{A}$$

- Quindi il vettore si scrive come somma vettoriale delle due componenti

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y}$$

Componenti cartesiane di un vettore

- E' importante che l'angolo sia misurato rispetto al semiasse positivo dell'asse x
- Le componenti avranno segno positivo o negativo a seconda che siano concordi o discordi con i versi positivi degli assi
- I segni dipendono dal valore dell'angolo



$\theta=0,\ A_x=A>0,\ A_y=0$

$\theta=45°,\ A_x=A\cos45° > 0,\ A_y=A\sin45° >0$

$\theta=90°,\ A_x=0,\ A_y=A>0$

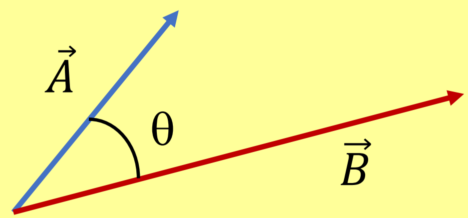
$\theta=180°,\ A_x=-A<0,\ A_y=0$

Prodotto scalare tra due vettori

E' un'operazione tra due vettori che restituisce uno scalare

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A\,B\,\cos\theta = c \qquad \theta \text{ è l'angolo tra i due vettori}$$

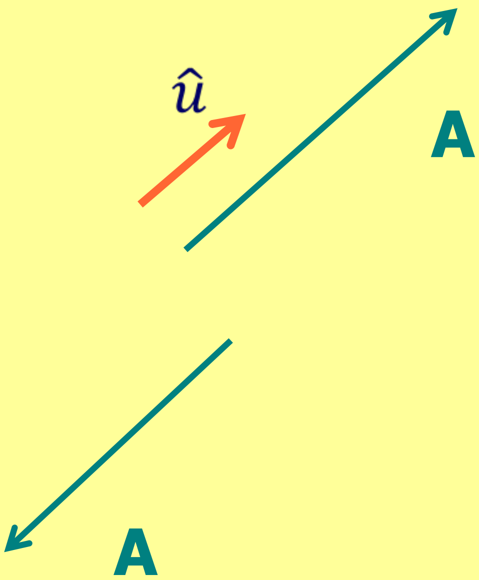
Le dimensioni fisiche di c sono date dal prodotto tra le dimensioni fisiche di $\overrightarrow{A}$ e le dimensioni di $\overrightarrow{B}$



Esempio: il lavoro di una forza (costante) è definito come il prodotto scalare tra la forza stessa e lo spostamento subito

$$L = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F\,\Delta r\,\cos\theta$$

Vettori unitari o versori

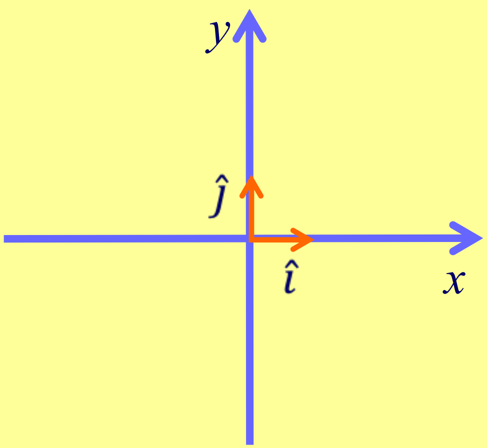


Un versore $\hat{u}$ è un vettore di modulo uguale a 1 e serve ad individuare una direzione ed un verso positivo

Se $\hat{u}$ è un versore nella stessa direzione del vettore **A**, allora **A** si può scrivere come

1) A = $|A|\,\hat{u}$, se **A** ha verso concorde a $\hat{u}$

2) A = $-\,|A|\,\hat{u}$, se **A** ha verso opposto a $\hat{u}$

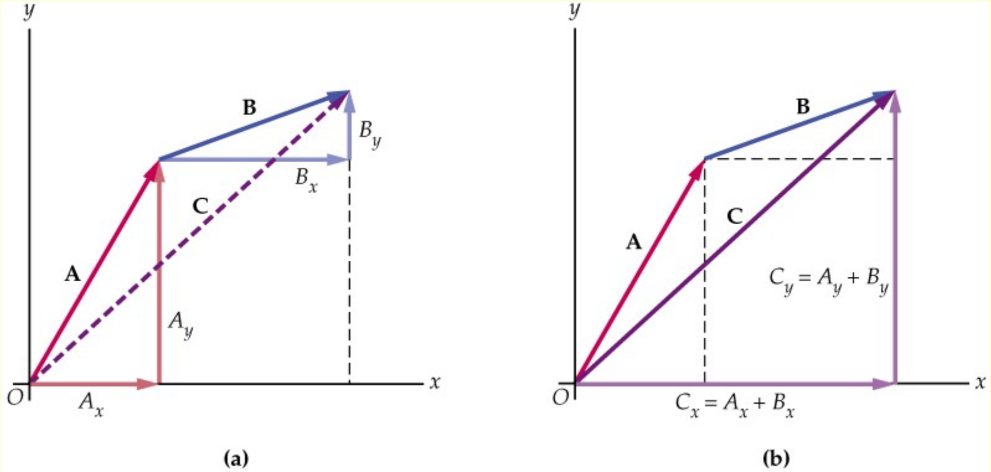


I versori $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ (e $\hat{k}$) sono vettori di modulo 1 e direzione e verso concordi con quelli degli assi x, y (e z) del sistema di riferimento cartesiano scelto

(Sull'orientamento della terna di assi e quindi dei vettori torneremo più avanti)

Somma dei vettori usando le componenti

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$



- Dati due vettori

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

- Usando la linearità dell'operazione di somma

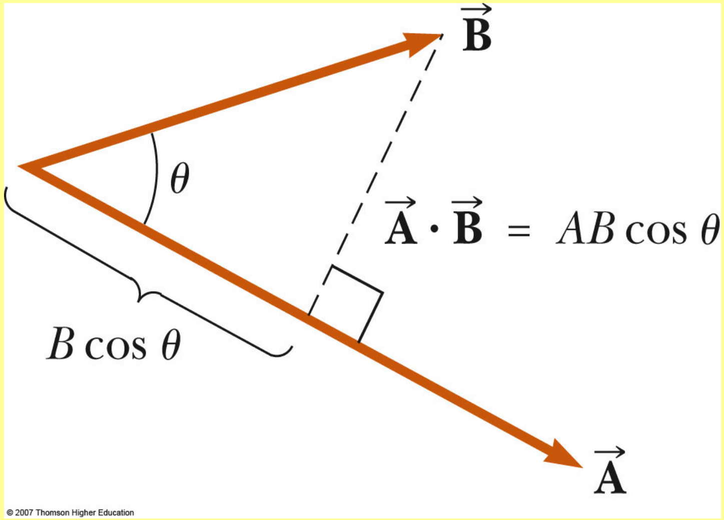
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

Quindi $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$

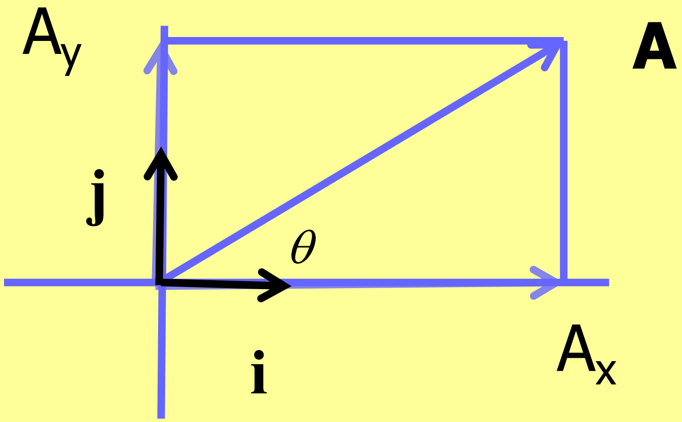
$$C_x = A_x + B_x \qquad C_y = A_y + B_y$$

Prodotto scalare



- Nel prodotto scalare conta la componente di un vettore sulla direzione dell'altro

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos\theta = A\,(Bcos\theta)$$



- Le componenti cartesiane di un vettore si ottengono dai prodotti scalari del vettore con i versori **i**, **j** e **k** degli assi

$$\vec{A} \cdot \hat{\imath} = A\,i\,cos\theta = Acos\theta = A_x$$

- Il prodotto scalare si può esprimere in termini delle componenti cartesiane dei due vettori

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

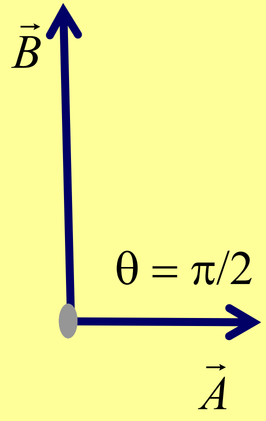
Prodotti scalari dei versori cartesiani

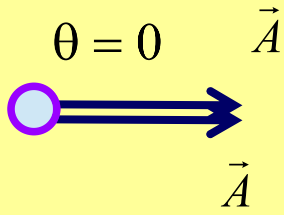
- I versori degli assi cartesiani sono vettori di modulo 1 e due versori diversi sono tra loro ortogonali, quindi valgono le relazioni:

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=0;\;\hat{i}\cdot\hat{k}=0;\;\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1;\;\hat{j}\cdot\hat{j}=1;\;\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

- Se due vettori sono ortogonali, infatti, la proiezione di un vettore lungo la direzione dell'altro è nulla
- Il prodotto scalare di un vettore con se' stesso è uguale al quadrato del modulo del vettore





$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Prodotto scalare scritto in termini delle componenti cartesiane dei due vettori

- Come dimostrare che $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$?

- Poichè i vettori si decompongono nelle somme delle loro componenti cartesiane

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

- Allora

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_x\hat{i}\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + A_y\hat{j}\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + A_z\hat{k}\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

- Usando la tabella dei prodotti scalari dei versori

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0;\ \hat{i}\cdot\hat{k} = 0;\ \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1;\ \hat{j}\cdot\hat{j} = 1;\ \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

- Si ha $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} + A_y\hat{j}\cdot B_y\hat{j} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k}$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Sommario

- Coordinate polari di un vettore A (A, θ)
- Coordinate cartesiane (A_x, A_y)

$$\begin{cases} A_x = A\cos(\theta) \\ A_y = A\sin(\theta) \end{cases}$$

- Relazione tra coordinate polari e cartesiane

$$\begin{cases} A = \sqrt{\left(A_x\right)^2 + \left(A_y\right)^2} \\ \tan\left(\theta\right) = \dfrac{A_y}{A_x} \quad \text{or} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right) \end{cases}$$

- Espressione di un vettore in componenti:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

- Somma di due vettori

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

$$C_x = A_x + B_x \qquad C_y = A_y + B_y$$

- Moltiplicazione di uno scalare per un vettore:

$$a\mathbf{A} = aA_x\hat{i} + aA_y\hat{j}$$

- Prodotto tra due vettori: prodotto scalare e prodotto vettoriale
  - Il prodotto scalare è uno scalare:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$