



Precorso Matematica

Disequazioni di I e II grado

Tiziana Pacelli

tiziana.pacelli@unina.it

<https://www.docenti.unina.it/tiziana.pacelli>

Indice lezione

Equazioni di I e II grado

- Disequazioni di I e II grado



Disequazioni

In matematica, una **disequazione** è una relazione di disuguaglianza tra due espressioni che contengono una o più incognite.

- $-3x^2 + 9x \leq 0$

- $x^2 - 1 > 0$

- $x^2 - x + 2 \leq 0$

- $x + 3 > 0$

- $x - 2 < x + 1$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$



Attenzione alle lettere usate!!!

Disequazioni

Una **soluzione della disequazione** é un numero che sostituito al posto dell'incognita rende vera la disuguaglianza

$$x^2 - 1 > 0$$

$$x = 3$$

soluzione

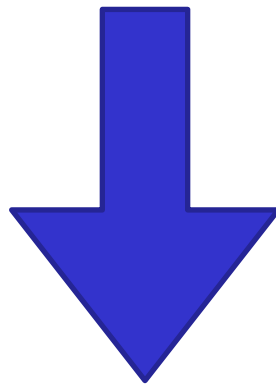
$$x = 0$$

NO soluzione

Disequazioni

Solitamente, le soluzioni di una disequazione sono costituite da uno o più insiemi numerici

(detti **intervalli**).



Risolvere una disequazione

significa trovare

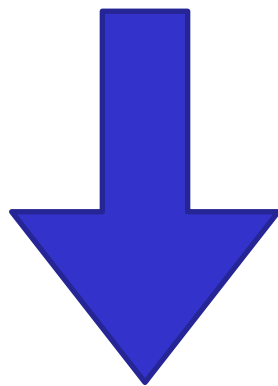
quell'insieme di valori che, attribuiti alle incognite, rendono la disuguaglianza effettivamente verificata.

Disequazioni

Risolvere una disequazione

significa trovare

quell'insieme di valori che, attribuiti alle incognite, rendono la disuguaglianza effettivamente verificata.



$$x > 1$$

$$x - 1 > 0$$

$$x = 2$$

Insieme delle soluzioni

NON unica soluzione

Disequazioni

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle **soluzioni** di una disequazione **NON** cambia se:

1. si **aggiunge** ai 2 membri di una disequazione una quantità (numero o incognita).

conseguenza: si può eliminare da entrambi i membri uno stesso termine oppure spostarlo da un membro all'altro cambiando il segno

2. si **moltiplicano o dividono** i due membri di una disequazione per una stessa quantità, a **patto di cambiare il verso** della disequazione nel caso in cui tale quantità sia negativa.

conseguenza: si può cambiare il segno a tutti i termini di entrambi i membri, purché si cambi anche il verso della disequazione

Disequazioni algebriche

Osservazione

Le disequazioni algebriche di **grado** n , con $n \in \mathbb{N}$, nell'incognita x

$$p(x) > 0 \quad \text{e} \quad -p(x) < 0$$

sono **equivalenti**.

Cambiando il segno a tutti i coefficienti del polinomio $p(x)$ e invertendo il verso della disequazione, ci si riconduce ad una disequazione equivalente alla data

Disequazioni algebriche

Esempio

Data la disequazione algebrica di **grado 4** con incognita x

$$-5x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

notiamo che, a patto di cambiare il segno a tutti i coefficienti del polinomio al primo membro e invertire il verso della disequazione, ci si può sempre ricondurre alla disequazione equivalente:

$$5x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1 \geq 0$$

Disequazioni algebriche di I grado

- Una *disequazione* è di *primo grado* o *lineare* se, dopo una serie di opportune semplificazioni, si può scrivere nella forma:

$$ax + b \geq 0 \quad (\text{oppure } > 0, \leq 0, < 0)$$

per due numeri reali $a \neq 0$ e b .

Ricordando che le due disequazioni di I grado

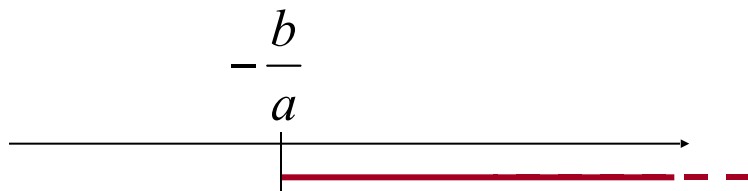
$$ax + b > 0 \quad \text{e} \quad -ax - b < 0, \quad \text{con } a \neq 0$$

sono equivalenti, nella risoluzione delle disequazioni di I grado ci si può sempre ricondurre al caso in cui il coefficiente $a > 0$

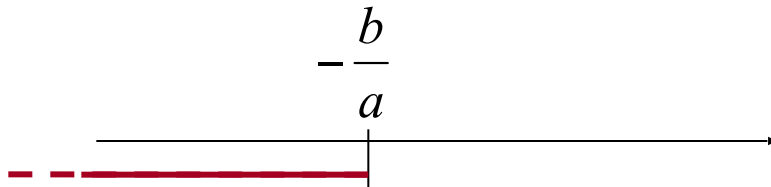
Disequazioni algebriche di I grado

$a > 0$ (per due numeri reali $a \neq 0$ e b)

- $ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$



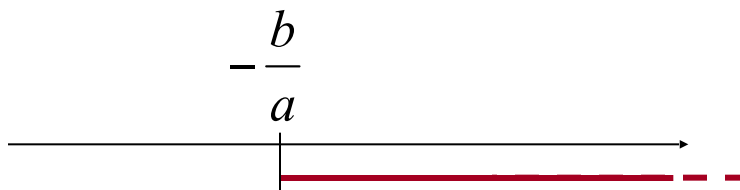
- $ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$



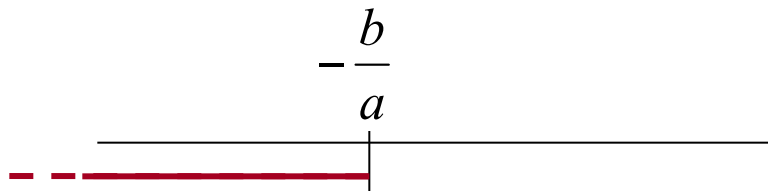
Disequazioni di I grado

Una disequazione di primo grado **ammette sempre** ***infinite soluzioni*** date da

$$x > -\frac{b}{a}$$



$$x < -\frac{b}{a}$$



Disequazioni di I grado

Esercizio 12. Risolvere la seguente disequazione

$$-3x < -5$$

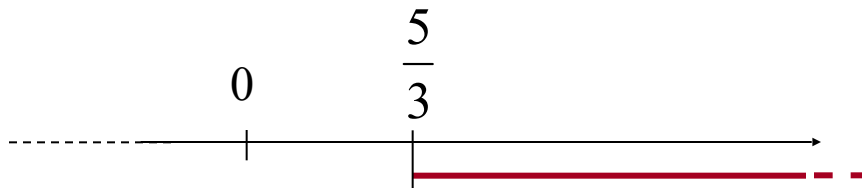
Soluzione: Si può cambiare il segno a entrambi i membri, in modo da rendere positivo il coefficiente -3 , cambiando il verso della disequazione:

$$3x > 5$$

Possiamo ora moltiplicare entrambi i membri per $1/3 > 0$, ottenendo:

Insieme
soluzioni

$$x > \frac{5}{3}$$



Disequazioni di I grado

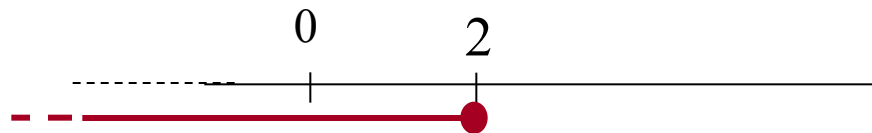
Esercizio 13. Risolvere la seguente disequazione

$$5x - 10 \leq 0$$

Soluzione.

$$5x \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{10}{5} \Rightarrow x \leq 2$$

Insieme
soluzioni



Disequazioni di I grado

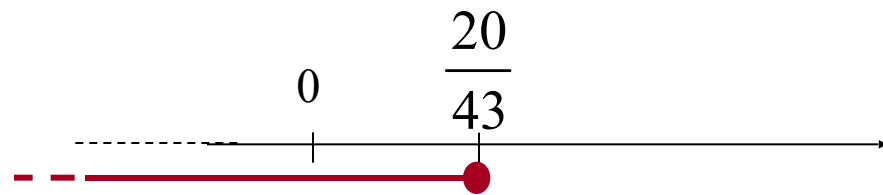
Esercizio 14. Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x-2}{3} + \frac{x}{4} \leq 1 - 3x$$

Soluzione. Calcolando al denominatore il m.c.m., la disequazione si riscrive in forma equivalente come segue

$$\frac{4x-8+3x}{12} \leq \frac{12-36x}{12} \Rightarrow 4x-8+3x \leq 12-36x \Rightarrow$$

$$43x \leq 20 \Rightarrow x \leq \frac{20}{43}$$



Insieme soluzioni

Disequazioni di I grado

Esercizio 15. Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt{3}x - \frac{5}{2} \geq \frac{x}{2} - \frac{3x + 10}{4}$$

Soluzione. Calcolando al denominatore il m.c.m., la disequazione si riscrive in forma equivalente come segue

$$\frac{4\sqrt{3}x - 10}{4} \geq \frac{2x - 3x - 10}{4} \Rightarrow 4\sqrt{3}x - \cancel{10} \geq 2x - 3x - \cancel{10} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{3}x - 2x + 3x \geq 0 \Rightarrow 4\sqrt{3}x + x \geq 0 \Rightarrow x(4\sqrt{3} + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \geq 0$$

Insieme soluzioni



Disequazioni algebriche di II grado

In matematica, una disequazione di *secondo grado* o *quadratica* è una disequazione algebrica ad una sola incognita x che compare con grado massimo pari a 2, e la cui espressione è riconducibile alla forma :

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$(ax^2 + bx + c < 0)$$

$$a \neq 0, a, b, c \in R$$

Disequazioni algebriche di II grado

Osservazione. Applicando i principi di equivalenza, dobbiamo ricordarci che , per $a \neq 0$, con $a, b, c \in R$, le disequazioni di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{e} \quad -ax^2 - bx - c < 0$$

sono equivalenti

Quindi, nella risoluzione delle disequazioni di II grado ci si può sempre ricondurre al caso in cui il **coefficiente a è positivo**

Diseguazioni algebriche di II grado - Soluzioni

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } ax^2 + bx + c < 0$$

$$a, b, c \in R$$

- **Passo1:**

verificare il segno del coefficiente a . Nel caso in cui $a < 0$, cambiare il segno a **TUTTI** i termini della disequazione e cambiare il verso della disequazione.

- **Passo2:**

determinare le radici reali x_1 e x_2 (se esistono) dell'equazione di II grado associata $ax^2 + bx + c = 0$ utilizzando la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

DISCRIMINANTE
perché?

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

DISCRIMINANTE
perché?

Soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

2 Soluzioni distinte

$$\Delta = 0$$

2 Soluzioni coincidenti

$$\Delta < 0$$

NON soluzioni reali

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

I CASO: $\Delta > 0, a > 0$

Due soluzioni
reali **distinte**

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < x_1, \quad x > x_2$$



$$\bullet \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$$

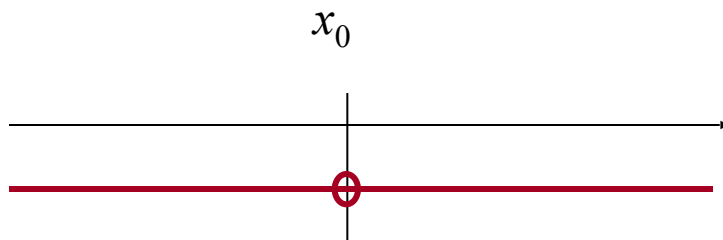


Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

II CASO: $\Delta = 0, a > 0$

Due soluzioni
reali **coincidenti**

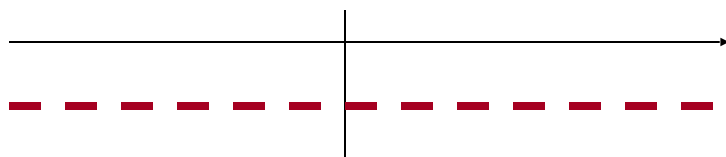
$$\bullet \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in R, x \neq x_0$$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 **radici coincidenti** pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in R$$



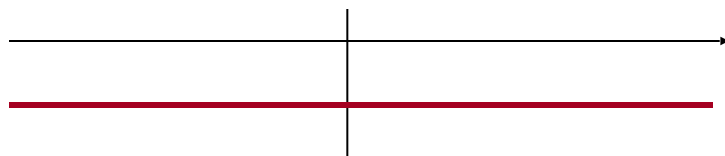
Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

II CASO: $\Delta = 0, a > 0$

Due soluzioni
reali **coincidenti**

• $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$

x_0

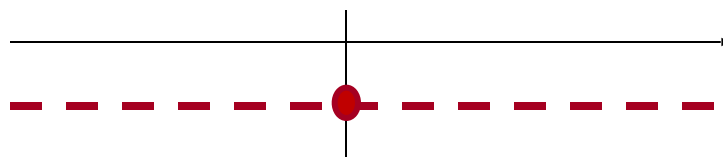


Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

• $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x = x_0$

x_0



Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$

NON esistono
soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R$



- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \exists x \in R$



Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$

NON esistono
soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$



- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \nexists x \in R$



Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 16. Risolvere la seguente disequazione

$$-x^2 + 12x - 11 \geq 0$$

Soluzione. Cambiamo il segno a tutti i termini e cambiamo anche il verso della disequazione:

$$x^2 - 12x + 11 \leq 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 44 = 100 > 0$

L'equazione associata ha due **soluzioni distinte**:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2} = \begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$x^2 - 12x + 11 \leq 0$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione sono:

$$1 \leq x \leq 11$$



Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 17. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9 > 0$$

Così, l'equazione associata ha due **soluzioni distinte**

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione sono:

$$x < 2 \text{ e } x > 5$$



Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 18. Risolvere la seguente disequazione

$$2x^2 + 13x + 20 > 0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 160 = 9 > 0$$

Così, l'equazione associata ha due **soluzioni distinte**

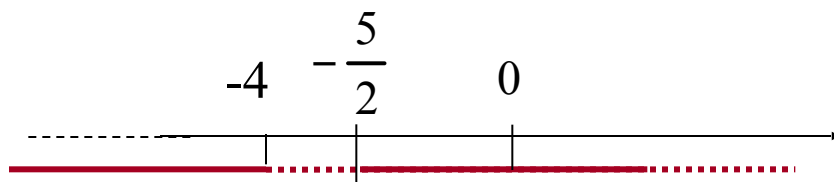
$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-13 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{c} -4 \\ -\frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$2x^2 + 13x + 20 > 0$$

In base al segno del coefficiente $a > 0$ e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione sono:

$$x < -4 \text{ e } x > -\frac{5}{2}$$



Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 19. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 10x + 25 > 0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 100 = 0$$

Così, l'equazione associata ha **due soluzioni reali coincidenti**

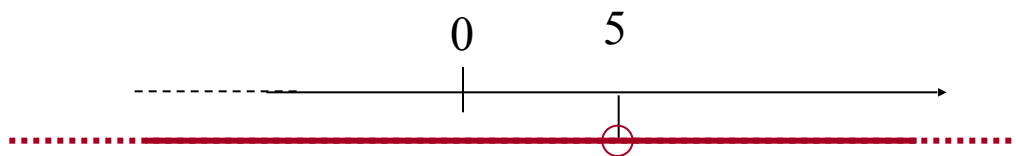
$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$x^2 - 10x + 25 > 0$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione sono:

$$\forall x \in R, \text{ con } x \neq 5$$



Disequazioni algebriche di II grado

$$x^2 - 10x + 25 > 0$$

Osservazione 1

Infatti, la disequazione di partenza si può riscrivere:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 > 0$$

$$\forall x \in R, \text{ con } x \neq 5$$

Diseguazioni algebriche di II grado

Osservazione 2

Se avessimo dovuto risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 10x + 25 \geq 0$$

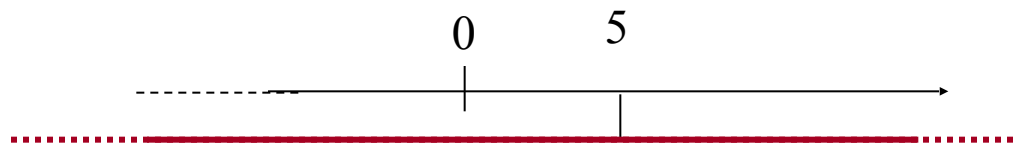
Soluzione.

$$\Delta = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$



$$\forall x \in R$$



Infatti, è vero che: $(x - 5)^2 \geq 0$ **SEMPRE!**

Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 20. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 14x + 49 \leq 0$$

Soluzione. Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 196 = 0$$

Così, l'equazione associata **ha due soluzioni coincidenti**

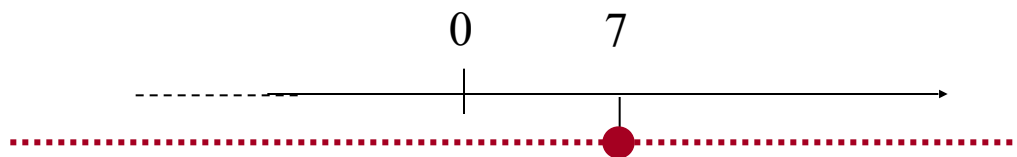
$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$x^2 - 14x + 49 \leq 0$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante le soluzioni della disequazione sono:

$$x = 7$$



Osservazione. Infatti, la disequazione di partenza si può riscrivere:

$$(x - 7)^2 \leq 0$$

Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 21. Risolvere la seguente disequazione

$$-12x^2 - 5x \geq 2$$

Soluzione. Si può cambiare il segno a entrambi i membri, cambiando il verso della disequazione:

$$-12x^2 - 5x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 + 5x + 2 \leq 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 96 = -71 < 0$

Se il discriminante è negativo, il trinomio
è sempre positivo (ha stesso segno di a)

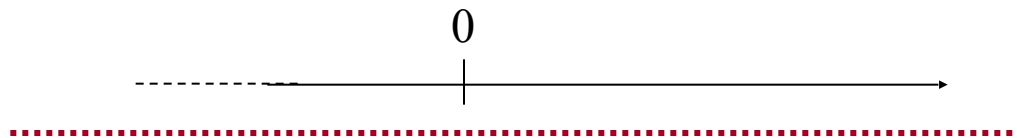
$$12x^2 + 5x + 2$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$12x^2 + 5x + 2 \leq 0$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante la disequazione **NON ammette soluzioni**:

$$\cancel{\exists} x \in R$$



Disequazioni algebriche di II grado

Esercizio 22. Risolvere la seguente disequazione

$$2x^2 - 3x > -2$$

Soluzione. Si può portare il -2 al primo membro:

$$2x^2 - 3x + 2 > 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$

Se il discriminante è negativo, il trinomio
è sempre positivo (ha stesso segno di a)

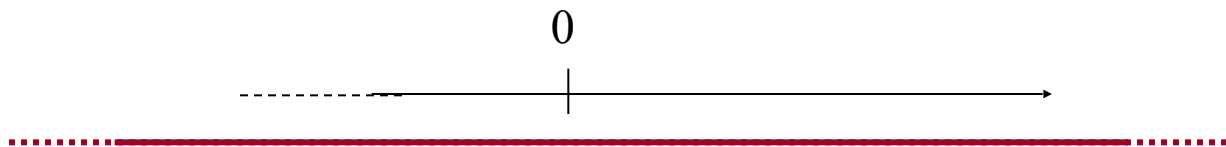
$$2x^2 - 3x + 2$$

Disequazioni algebriche di II grado

$$2x^2 - 3x + 2 > 0$$

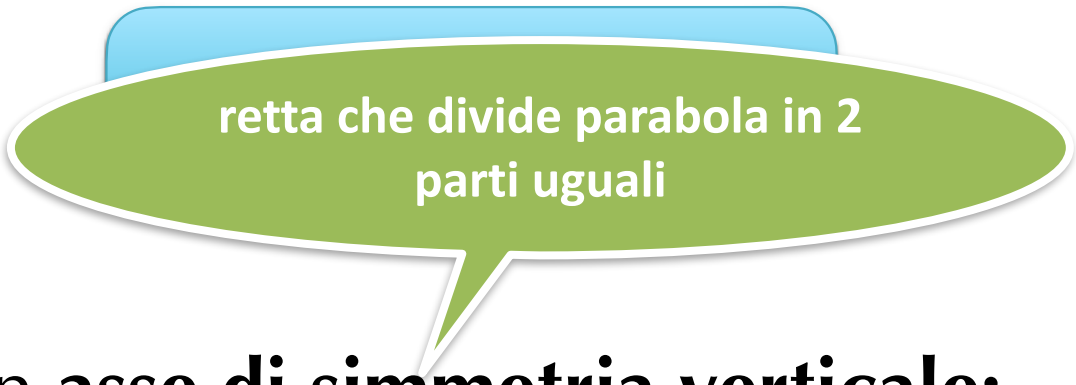
In base al verso della disequazione e al segno del discriminante la disequazione ammette **infinite soluzioni**:

$$\forall x \in R$$



Risoluzioni di disequazioni

Che significa risolvere/interpretare una disequazione anche graficamente?



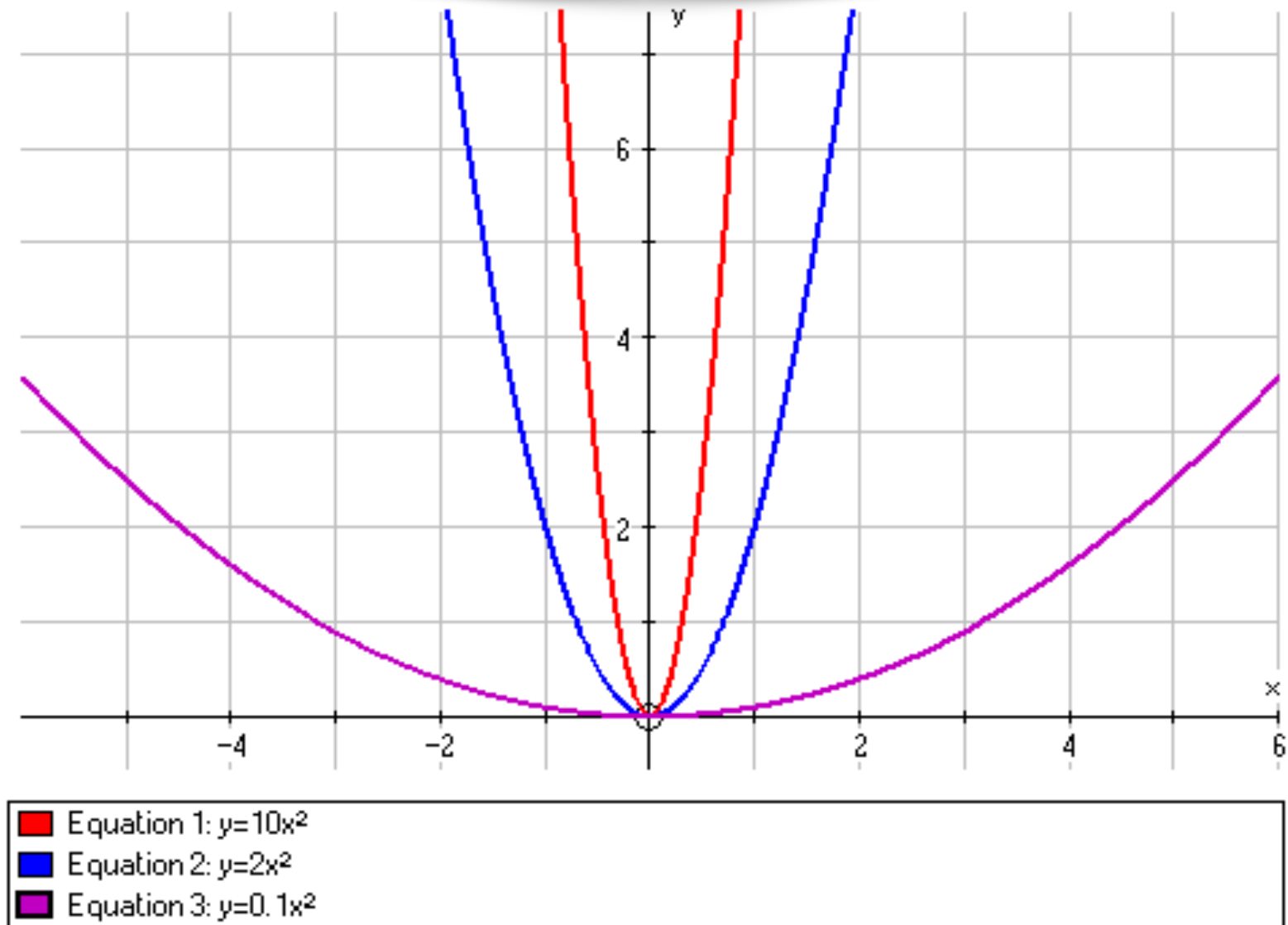
retta che divide parabola in 2
parti uguali

Parabola con **asse di simmetria verticale**:

$$y = ax^2 + bx + c$$

- il **coefficiente a** determina la concavità (convessità) della parabola
 - ✱ **$a > 0$** concavità rivolta verso l'alto,
 - ✱ **$a < 0$** concavità rivolta verso il basso,
 - ✱ **al crescere di a (in modulo) cresce la curvatura.**

Parabola



Al crescere di a (in modulo) cresce la curvatura

$$x = -(b/2a)$$

Parabola

Parabola con **asse di simmetria verticale**:

$$y = ax^2 + bx + c$$

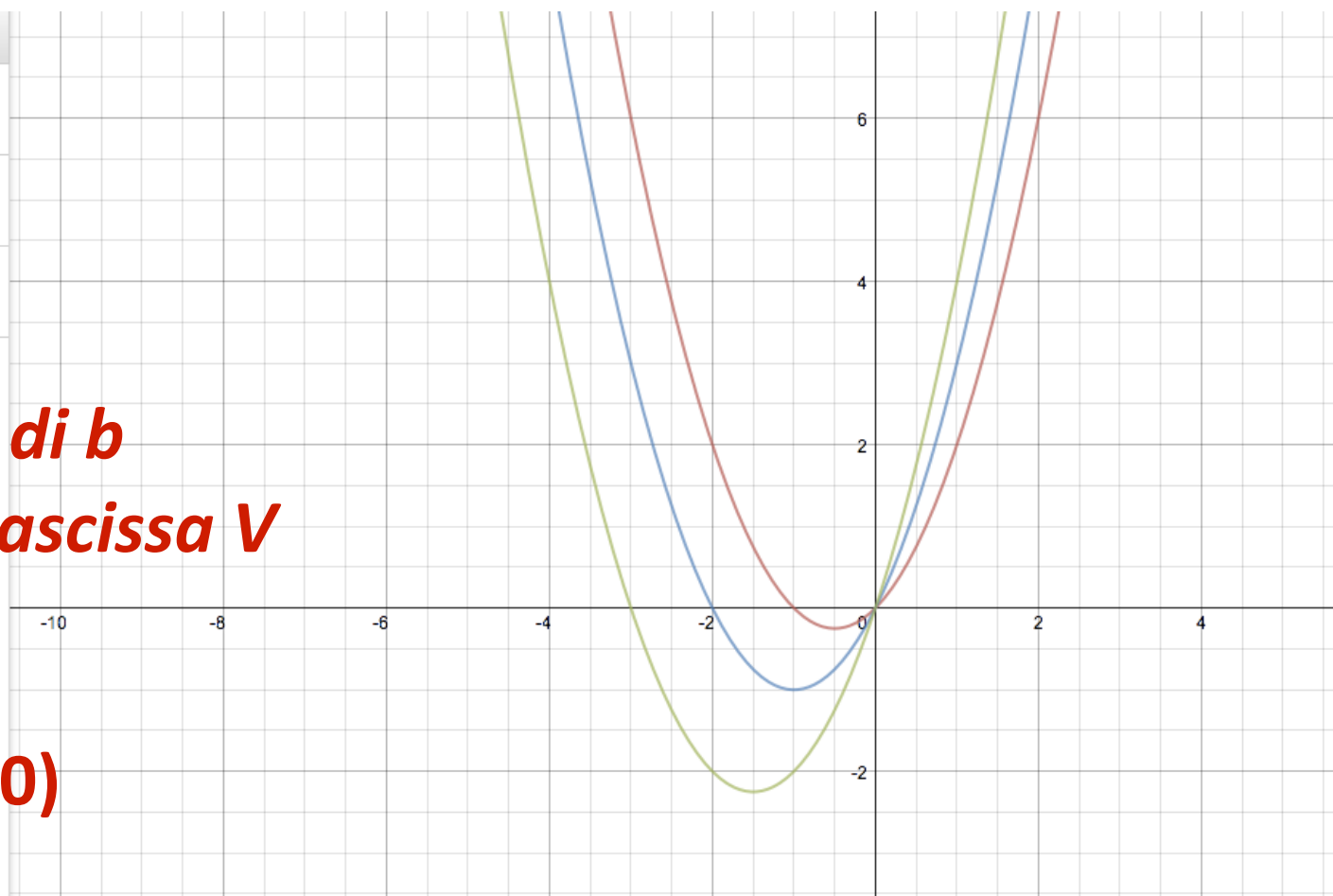
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

- il **coefficiente b** è legato alla **posizione dell'asse della parabola** (la retta verticale passante per il vertice) e all'**ascissa del vertice** (e quindi ad eventuali punti di massimo o minimo)
- il **coefficiente c** determina il **punto di intersezione della parabola con l'asse delle ordinate**

Parabola

$a > 0$ concavità verso alto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

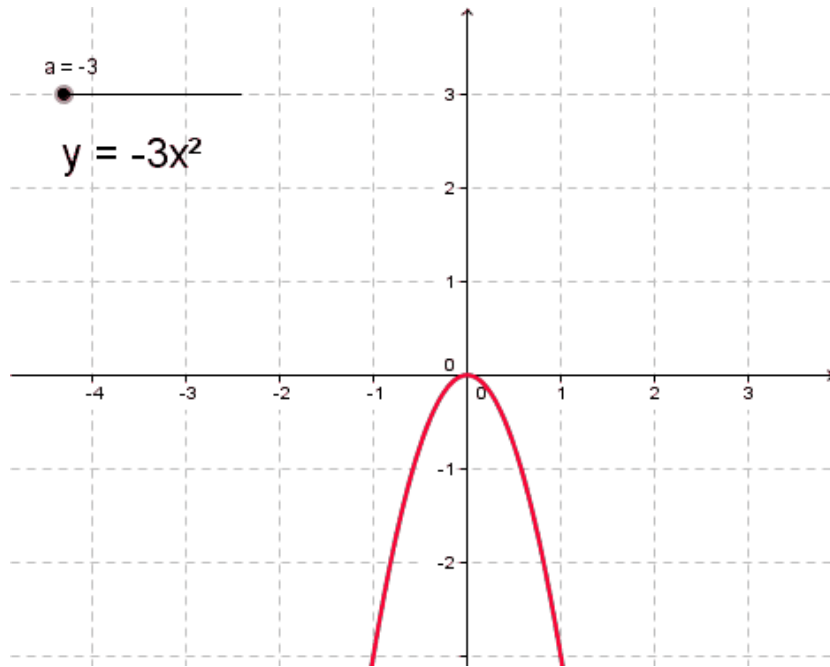


***al variare di b
cambia asse e ascissa V***

$$c = 0$$

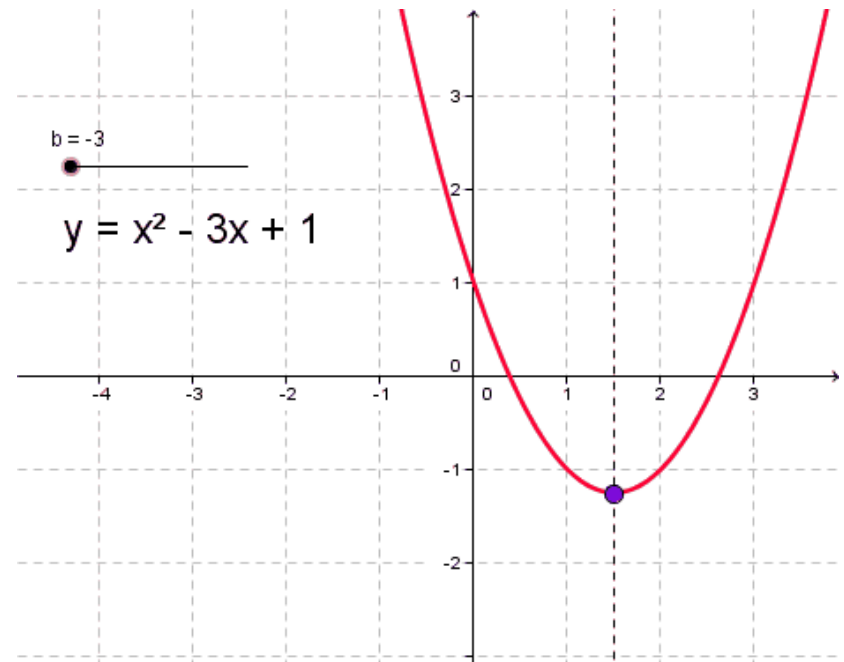
passa per $O(0,0)$

Parabola



al variare di a

al variare di b



Disequazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

Intersezione con asse x

Risolvere equazione di II grado

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$ 2 Soluzioni distinte

$\Delta = 0$ 2 Soluzioni coincidenti

$\Delta < 0$ NON soluzioni reali

Soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Risoluzioni di disequazioni

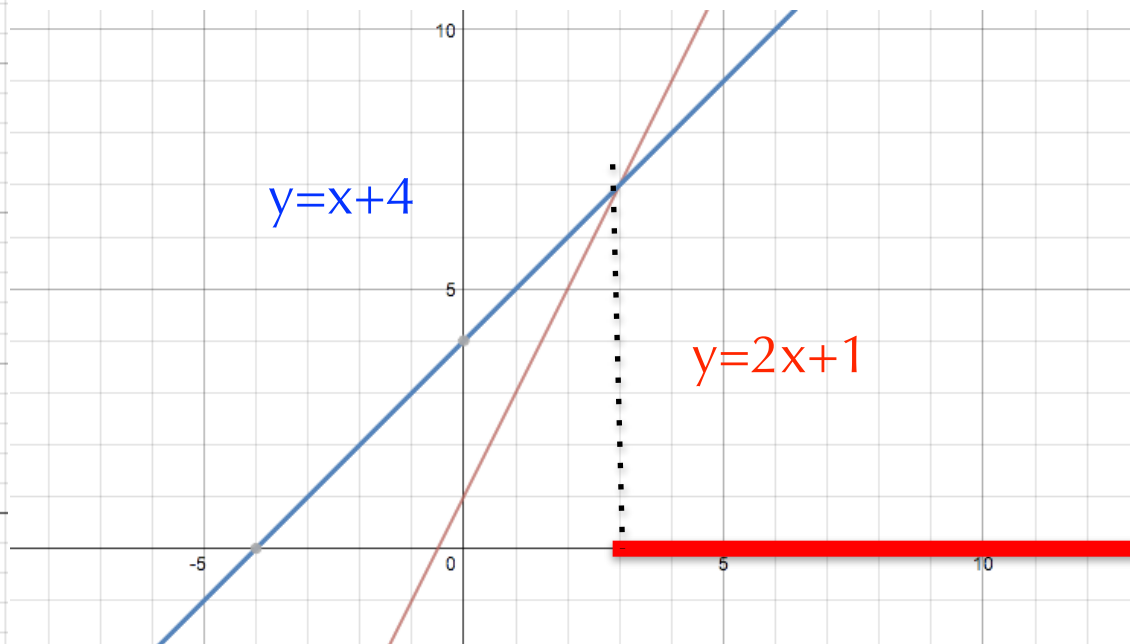
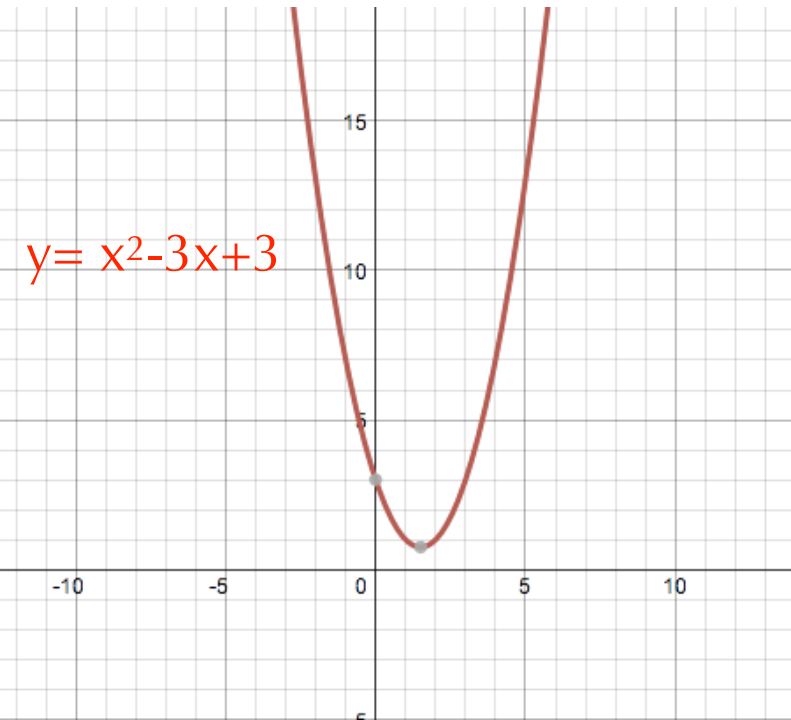
Risolvi e rappresenta sul piano cartesiano le seguenti disequazioni

$$x^2 - 3x + 3 < 0$$

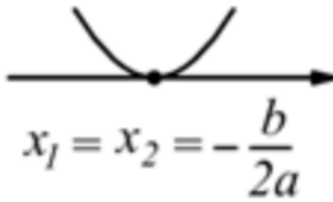
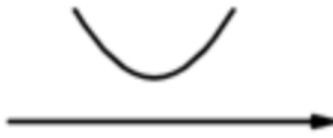
$$2x + 1 \geq x + 4$$

$$\text{non} \exists x \in R$$

$$x \geq 3$$



Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$	parabola
$\Delta > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$	
$\Delta = 0$	$\forall x \in R$ $x \neq -\frac{b}{2a}$	$\forall x \in R$	$x \in \emptyset$	$x = -\frac{b}{2a}$	
$\Delta < 0$	$\forall x \in R$	$\forall x \in R$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	

Disequazioni algebriche di II grado - Soluzioni

- $f(x)$ definita dal seguente grafico

Ragioniamo:

sull'equazione $f(x) = y^*$;
sulla disequazione $f(x) > y^*$
sulla disequazione $f(x) < y^*$

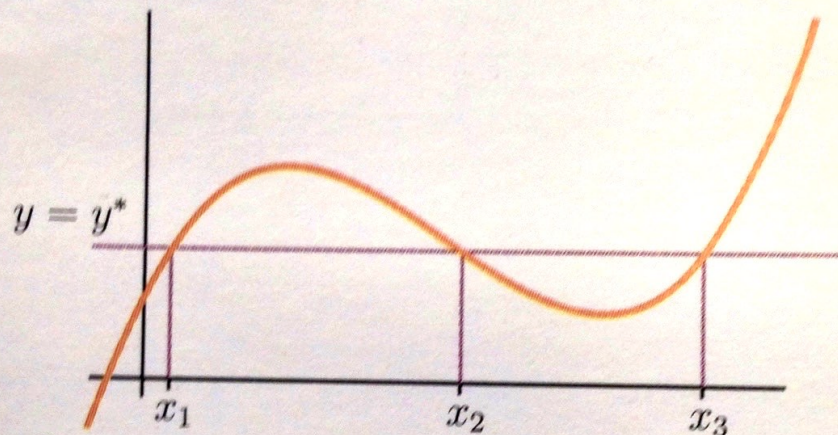


Figura 4.34

Rappresentazione grafica dell'equazione $f(x) = y^*$: i valori x_1 , x_2 , x_3 risolvono l'equazione perché sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico di f con la retta $y = y^*$. La disequazione $f(x) > y^*$ è risolta dai valori di x tali che $x_1 < x < x_2$ e tali che $x > x_3$; infatti per questi valori dell'ascissa il grafico di f è al di sopra della retta.

Problema: il peso

Le curve di crescita media del peso dei bambini mostrano un andamento sostanzialmente **lineare** nel periodo compreso tra 1 e 5 anni. Supponiamo che un bimbo di 1 anno **pesi 9kg** e che il suo peso aumenti di **200gr al mese**, mentre una bambina della stessa età pesi **9.5 kg** e il suo peso aumenti di **180gr al mese**.

Dopo quanto tempo il bambino peserà più della bambina?

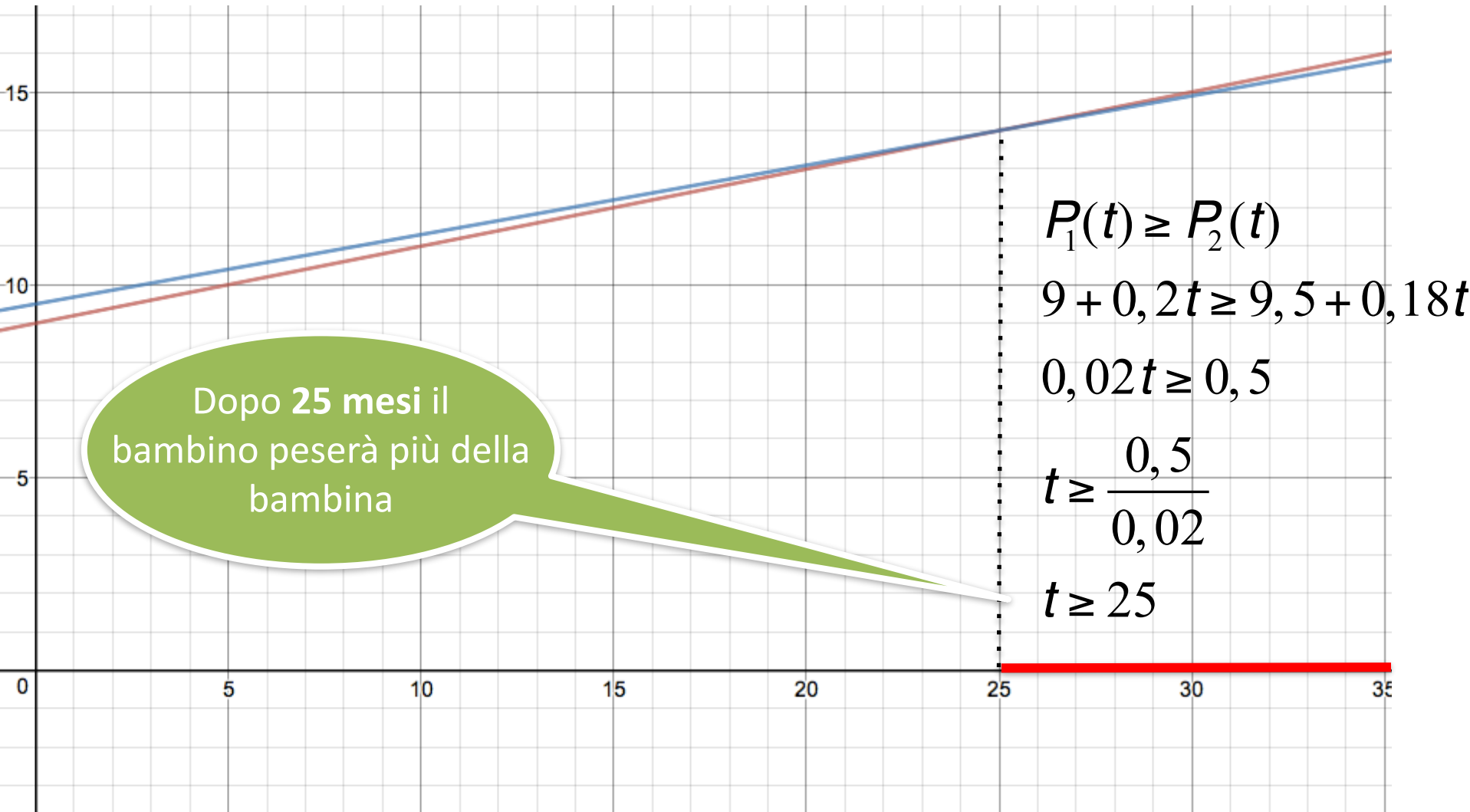
Problema: il peso

$$P_1(t) = 9 + 0,2t$$

$$P_2(t) = 9,5 + 0,18t$$

t= mesi

convertito peso in Kg



Problema: crescita delle muffe

La muffa *Mucor amphibiorum* a 25°C ha una **crescita** in altezza essenzialmente **lineare** con **tasso di crescita pari a 1 cm/h**, mentre la muffa *Mucor circinelloides* alla stessa temperatura ha una **crescita di tipo quadratico nella stessa unità di tempo**. Se in un esperimento l'altezza iniziale della *Mucor amphibiorum* è pari a **3 cm**, mentre l'altezza iniziale *Mucor circinelloides* è di **1 cm**:

- Individuare e definire le **funzioni che descrivono gli andamenti di crescita delle due specie di muffe**.
- Definire, **se e dopo quanto tempo** la muffa *Mucor circinelloides* è **più alta della *Mucor amphibiorum***.
- Determinare **l'altezza delle 2 muffe nel momento in cui risulteranno uguali**.

Problema: crescita delle muffe

con tasso di crescita pari a **1 cm/h**,

