Precorso Matematica

Sistemi di disequazioni
Disequazioni prodotto e quoziente

Tiziana Pacelli
tiziana.pacelli@unina.it
https://www.docenti.unina.it/tiziana.pacelli

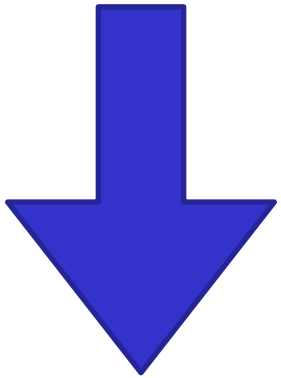
Indice lezione

- Sistemi di disequazioni
- Disequazioni prodotto
- Disequazioni quoziente

Sistemi di disequazioni

Sistemi di disequazioni

Date più disequazioni, ci proponiamo di trovare in *R* le loro soluzioni **comuni** e cioè **l'insieme intersezione** degli insiemi di soluzioni delle singole disequazioni date.



si dice allora che l'insieme delle disequazioni date costituisce un

Sistema di disequazioni

Sistemi di disequazioni

Consideriamo un sistema di ***n* disequazioni** ($n \in \mathbb{N}$).

Ogni disequazione del sistema ammette l'insieme di soluzioni S_i, con $i=1,..,n$.

$$\begin{cases} D_1(x) > 0 \rightarrow S_1 \\ D_2(x) > 0 \rightarrow S_2 \\ ..... \\ D_n(x) > 0 \rightarrow S_n \end{cases}$$

L'insieme S delle soluzioni del sistema considerato è dato da:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n$$

Sistemi di disequazioni

Risolvere un sistema significa determinare l'insieme intersezione degli insiemi costituiti dalle soluzioni delle singole disequazioni

Cioè, per risolvere un sistema bisogna:

1. **risolvere** separatamente **ciascuna delle disequazioni** che lo compongono;
2. **confrontare sull'asse reale** le soluzioni delle singole disequazioni;
3. **determinare le soluzioni comuni.**

Sistemi di disequazioni

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 7 < 0 \\ x - 13 \geq 0 \end{cases}$$

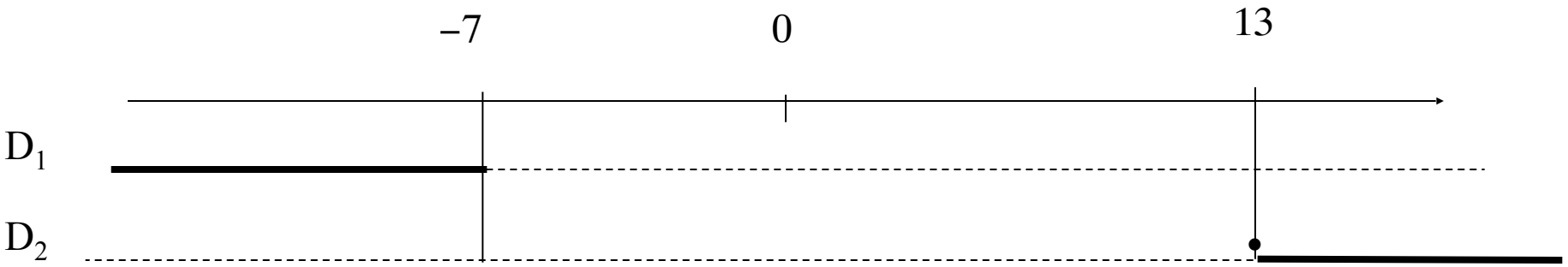
Soluzione. Si risolvono separatamente le due disequazioni

- $x + 7 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x < -7}$

- $x - 13 \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{x \geq 13}$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x < -7 \\ x \geq 13 \end{cases}$$



$$S = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \nexists x \in R$$

Sistemi di disequazioni

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x^2-3x-4\geq 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si risolvono separatamente le due disequazioni

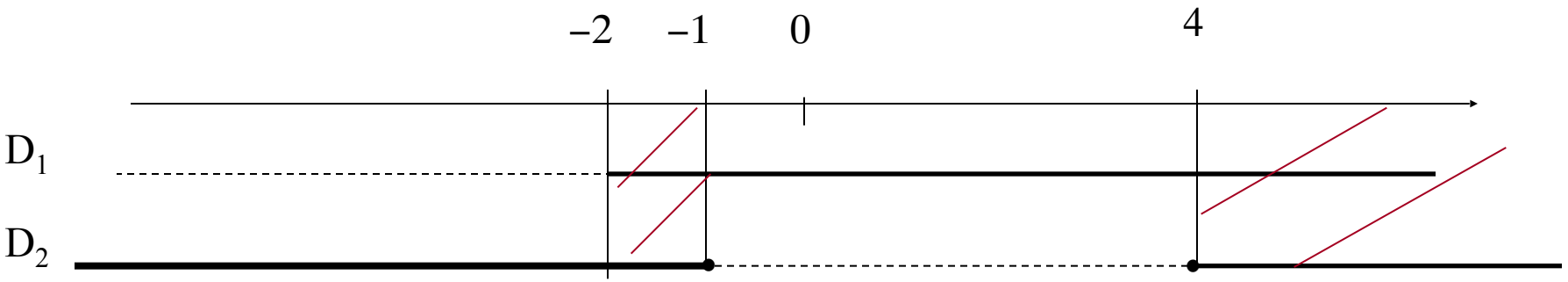
- $x+2>0 \Rightarrow$ $\boxed{x>-2}$
- $x^2-3x-4\geq 0$:

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{+3\pm\sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow x_1=-1, x_2=4$$

$$\boxed{\Rightarrow x\leq -1 \text{ e } x\geq 4}$$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x > -2 \\ x \le -1 \quad \text{e} \quad x \ge 4 \end{cases}$$



$$S =]-2,-1] \cup [4,+\infty[\Leftrightarrow -2 < x \le -1 \quad \text{e} \quad x \ge 4$$

Sistemi di disequazioni

Esercizio 3. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 17 < 0 \\ 3x^2 - 2x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si risolvono separatamente le due disequazioni

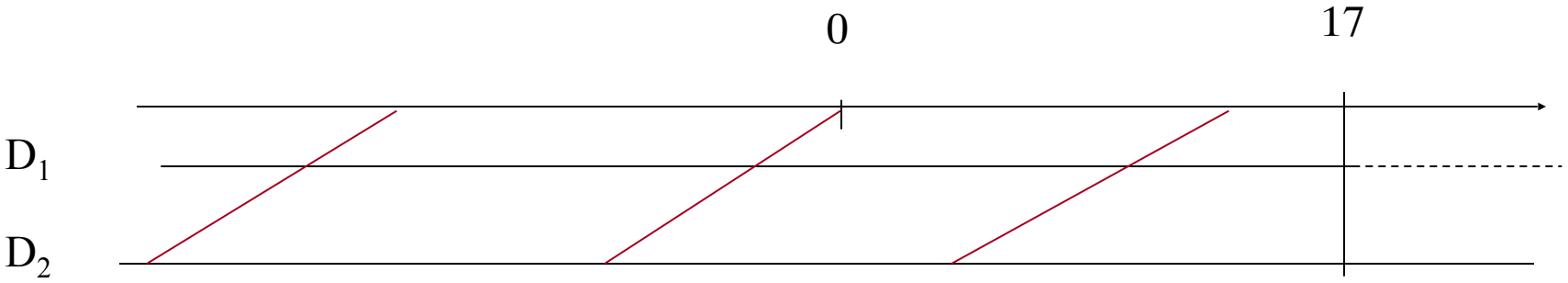
- $x - 17 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x < 17}$

- $3x^2 - 2x + 9 \geq 0 \Rightarrow$ Si calcola il **discriminante**

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 108 = -104 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\forall x \in R}$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x < 17 \\ \forall x \in R \end{cases}$$



$$S =]-\infty, 17[\quad \Leftrightarrow \quad x < 17$$

Sistemi di disequazioni

Esercizio 5. Risolvere il seguente sistema di disequazioni di I grado:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{\sqrt{5}} < x \\ 3x-4 > \dfrac{2x-12}{3} \end{cases}$$

Soluzione: risolviamo separatamente le due disequazioni che costituiscono il sistema

$$\frac{x+2}{\sqrt{5}} < x \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{5}} - x < 0 \Rightarrow \frac{x+2-\sqrt{5}x}{\sqrt{5}} < 0 \Rightarrow x+2-\sqrt{5}x < 0$$

Sistemi di disequazioni

$$x+2-\sqrt{5}x<0 \Rightarrow x\underbrace{\left(1-\sqrt{5}\right)}_{<0}+2<0$$

La quantità in parentesi è un **numero negativo**, per farla diventare un numero positivo possiamo moltiplicare tutti i termini della disequazione per -1 ricordando di cambiare anche il verso della disequazione

$$x\left(\sqrt{5}-1\right)-2>0 \Rightarrow \boxed{x>\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

è soluzione della prima disequazione

Sistemi di disequazioni

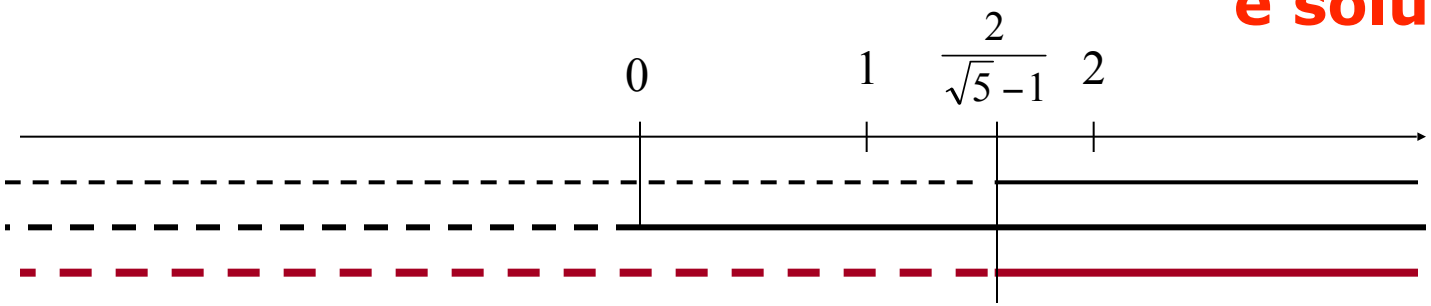
- $3x-4-\dfrac{2x-12}{3}>0 \Rightarrow \dfrac{9x-\cancel{12}-2x+\cancel{12}}{3}>0$

$$\Rightarrow 7x>0 \Rightarrow \boxed{x>0}$$

è soluzione della seconda disequazione

$$\Rightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x>\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

è soluzione



Sistemi di disequazioni

Esercizio 6. Risolvere il seguente sistema di disequazioni di II grado:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 - 5 > 0 \end{cases}$$

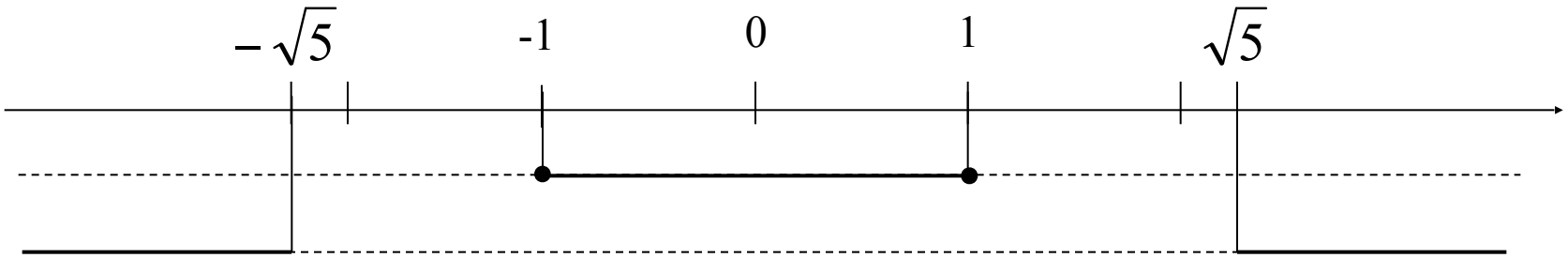
Soluzione: risolviamo separatamente le due disequazioni che costituiscono il sistema.

- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{4}}{2} = \dfrac{\pm 2}{2} = \pm 1$ $\quad \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$
- $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{20}}{2} = \dfrac{\pm 2\sqrt{5}}{2} = \pm\sqrt{5}$

$$\Rightarrow x < -\sqrt{5},\ x > \sqrt{5}$$

Sistemi di disequazioni

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x < -\sqrt{5},\ x > \sqrt{5} \end{cases}$$



Il sistema **NON** ammette soluzioni

Sistemi di disequazioni

Esercizio 7. Risolvere il seguente sistema di disequazioni di II grado:

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{3} \leq 0 \\ x^2 - 5 > 0 \end{cases}$$

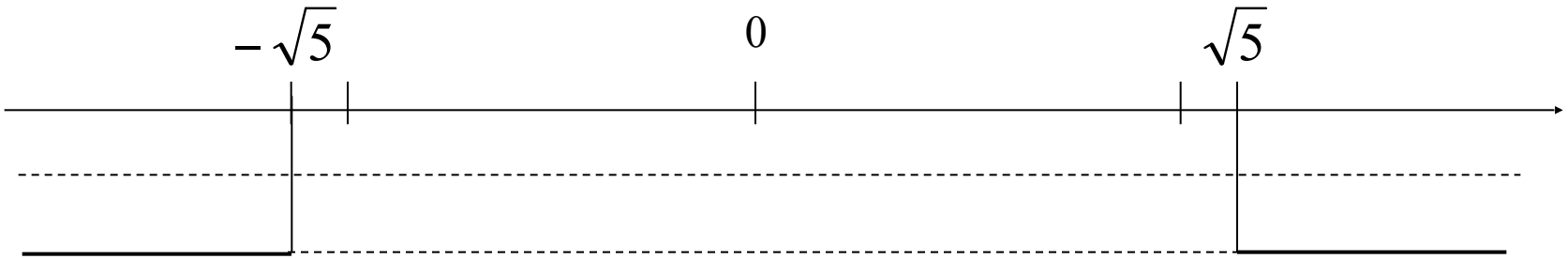
Soluzione: risolviamo separatamente le due disequazioni che costituiscono il sistema.

- $x^2 + \sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\nexists x \in R}$
- $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{2} = \pm\sqrt{5}$

$$\Rightarrow x < -\sqrt{5},\ x > \sqrt{5}$$

Sistemi di disequazioni

$$\Rightarrow \begin{cases} \nexists x \in R \\ x < -\sqrt{5},\ x > \sqrt{5} \end{cases}$$



Il sistema NON ammette soluzioni

Sistemi di disequazioni

Esercizio 8. Risolvere il seguente sistema di disequazioni di II grado:

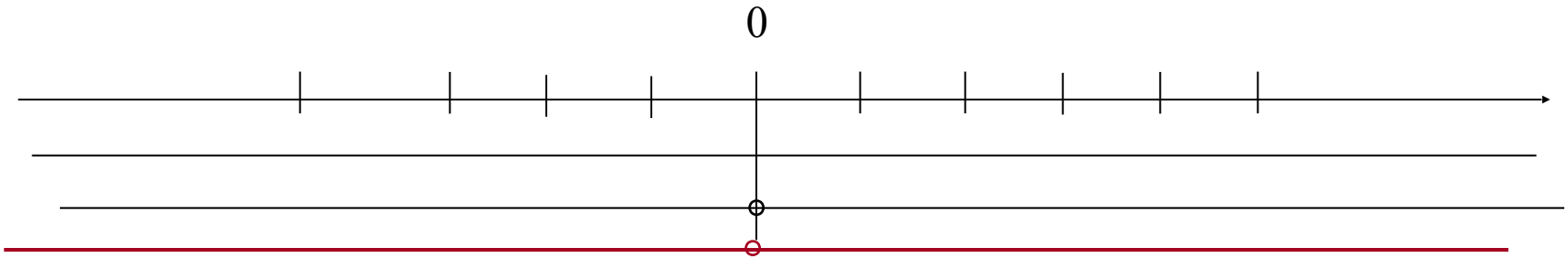
$$\begin{cases} 5x^2 + 2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

Soluzione: risolviamo separatamente le due disequazioni che costituiscono il sistema.

- $5x^2 + 2 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall x \in R$
- $x^2 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall x \neq 0$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} \forall x \in R \\ \forall x \neq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \forall x \neq 0$$

è la soluzione del sistema.

Sistemi

Esercizio 9. Risolvere il seguente sistema :

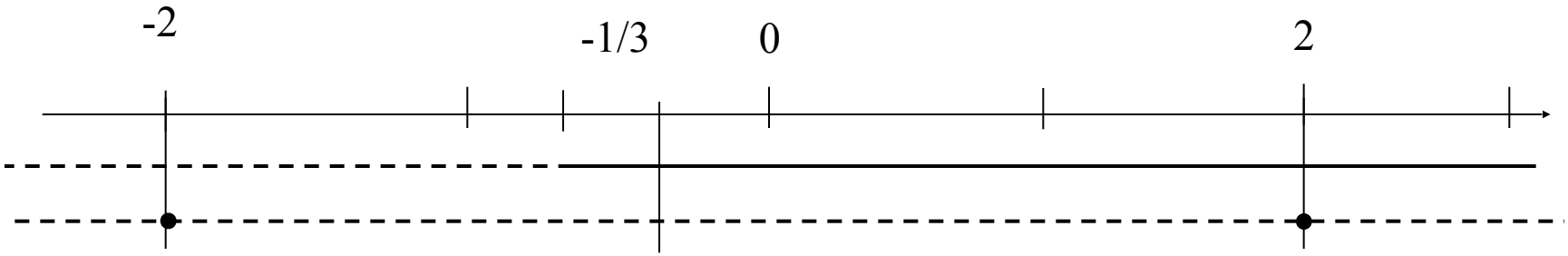
$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ x^2-4=0 \end{cases}$$

Soluzione: risolviamo separatamente le due espressioni algebriche che costituiscono il sistema.

- $3x+1>0 \Rightarrow \boxed{3x>-1 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}}$
- $x^2-4=0 \Rightarrow \boxed{x=-2, \quad x=2}$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{3} \\ x = -2,\ x = 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = 2$$

è la soluzione del sistema.

Sistemi di disequazioni

Esercizio 10. Risolvere il seguente sistema di disequazioni di II grado:

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ x^2 + 5x + 6 \le 0 \\ x^2 > 5x \end{cases}$$

Soluzione: risolviamo separatamente le tre disequazioni che costituiscono il sistema.

- $x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \Rightarrow \Delta < 0$ $\Rightarrow \forall x \in R$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ x^2 + 5x + 6 \le 0 \\ x^2 > 5x \end{cases}$$

- $x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

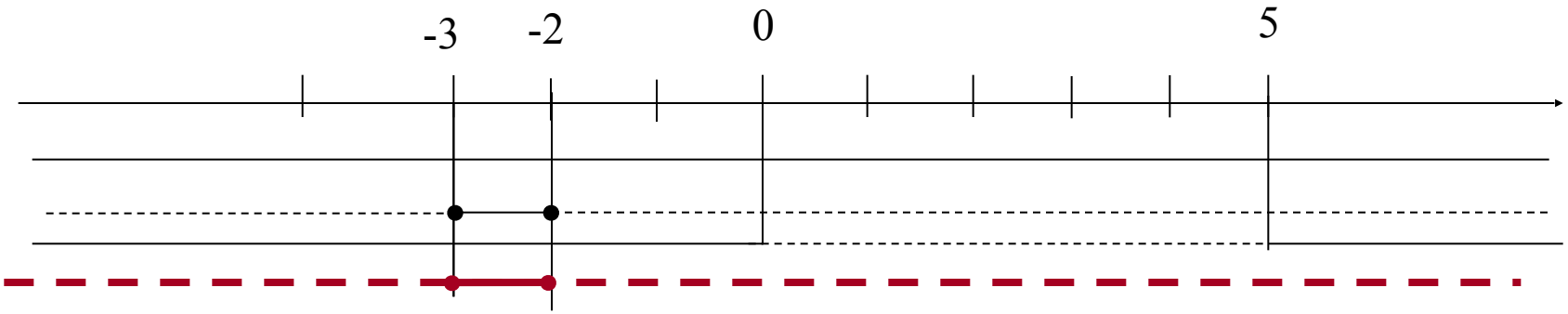
$$\Rightarrow -3 \le x \le -2$$

- $x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{5 \pm 5}{2} = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow x < 0, \quad x > 5$$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} \forall x \in R \\ -3 \leq x \leq -2 \\ x < 0,\ x > 5 \end{cases}$$



$\Rightarrow -3 \leq x \leq -2$ è la soluzione del sistema.

Disequazioni prodotto

Disequazioni di tipo particolare

Consideriamo una disequazione del tipo

$$F_1(x) \cdot F_2(x) > 0$$

Affinché il prodotto di due fattori sia **POSITIVO** è necessario che tali fattori siano **concordi (**cioè, abbiano **lo stesso segno)**

Si possono trovare le soluzioni di tale disequazione **determinando il segno dei valori assunti da F_1 e da F_2** al variare della x e successivamente il segno del loro prodotto

Disequazioni di tipo particolare

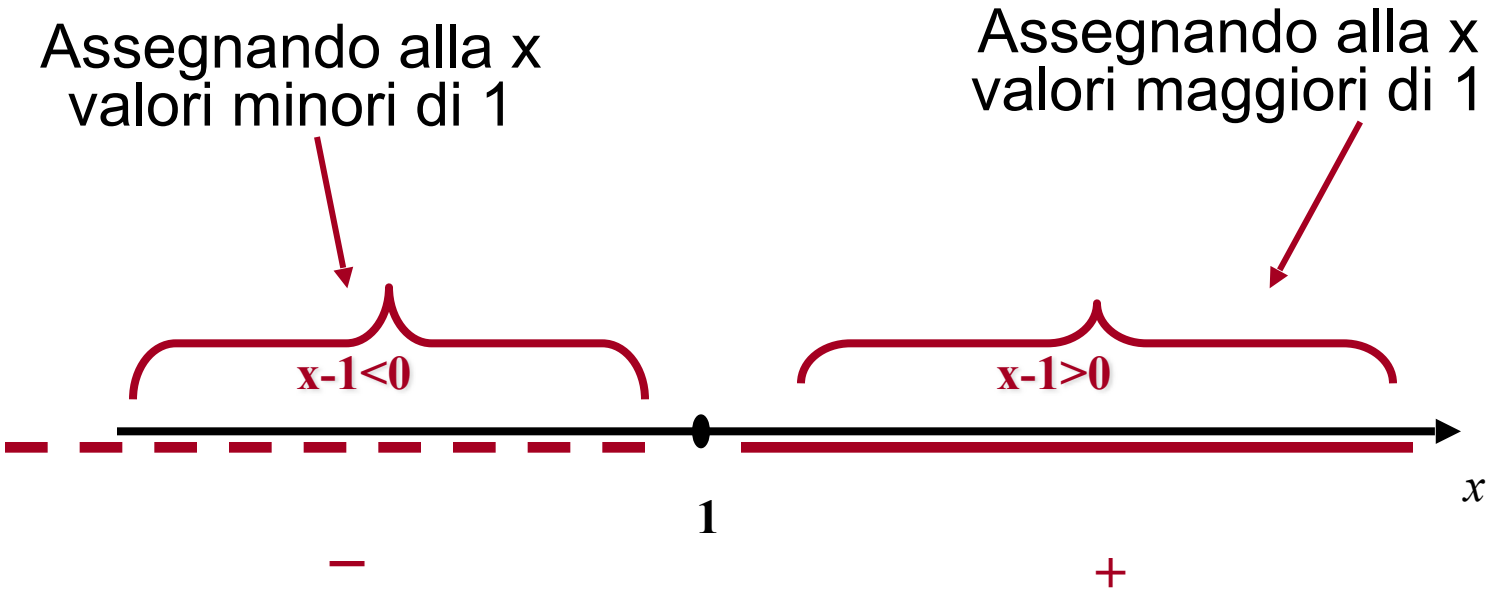
Osservazione. Se la disequazione è del tipo

$$F_1(x) \cdot F_2(x) < 0$$

Affinché il prodotto di due fattori sia **NEGATIVO** è necessario che tali **fattori siano discordi** (cioè, abbiano **segno opposto)**

Disequazioni di tipo particolare

Osservazione. Risolvere la disequazione $x-1>0$ significa andare a considerare tutti i valori $x>1$



Disequazioni prodotto

Esercizio 1. Risolvere la seguente disequazione:

$$(1-2x)\cdot(x^2-3x-4)>0$$

***Soluzione*.**

***Passo 1*.**

Studiamo separatamente il segno dei due fattori **ponendoli >0**

- $F_1>0 \Rightarrow 1-2x>0 \Rightarrow \quad 2x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F_1>0 \ \text{ se } \ x<\frac{1}{2}$$

Disequazioni prodotto

- $F_2 > 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$$

$$\Rightarrow x < -1 \quad \text{e} \quad x > 4$$

$$\Rightarrow F_2 > 0 \ \text{se} \ x < 1 \ \text{e} \ x > 4$$

Disequazioni prodotto

Quindi:

$$F_1 > 0 \text{ se } x < \frac{1}{2}$$

$$F_2 > 0 \text{ se } x < 1 \text{ e } x > 4$$

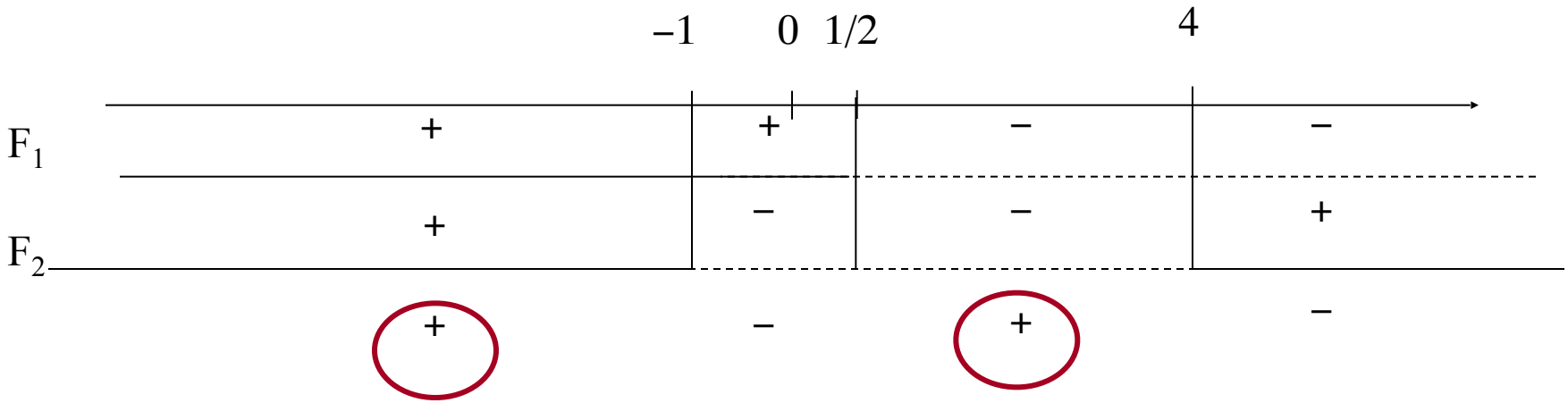
Passo 2.

Riportiamo i risultati sull'asse delle ascisse indicando con una linea continua gli intervalli di positività e una linea discontinua gli intervalli di negatività

Disequazioni prodotto

- $1-2x>0$ se $x<\frac{1}{2}$
- $x^2-3x-4>0$ se $x<-1$ e $x>4$

$$(1-2x)\cdot(x^2-3x-4)>0$$



Passo 3. Facciamo il **PRODOTTO DEI SEGNI** dei due fattori e consideriamo gli intervalli col segno positivo

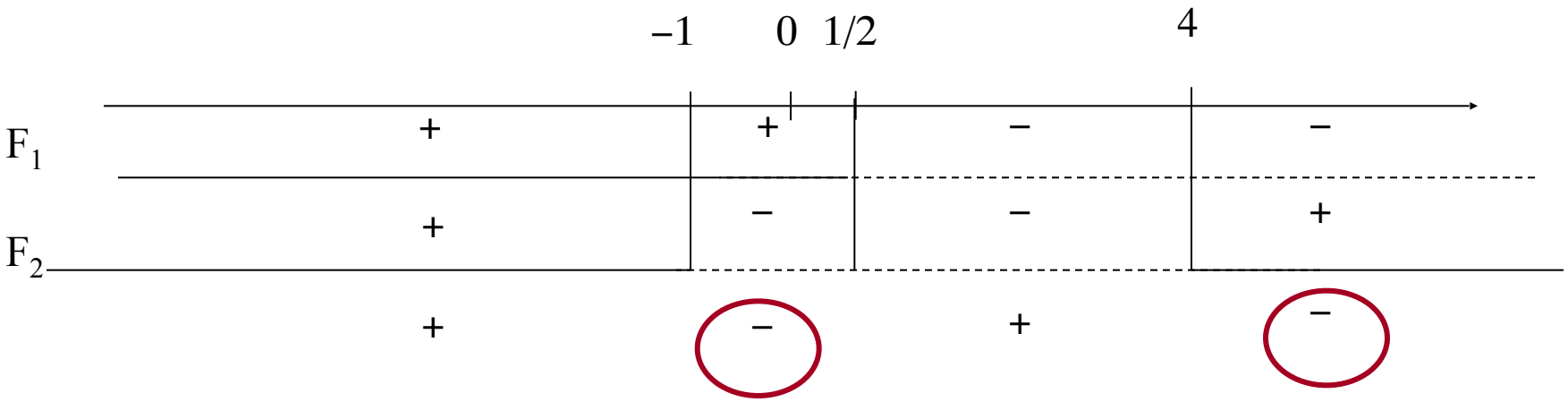
$$x<-1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}<x<4$$

Disequazioni prodotto

Osservazione 1.

Se la disequazione fosse stata col **segno <0**

$$(1-2x)\cdot(x^2-3x-4)<0$$



Bisognava considerare gli **intervalli col segno negativo**

$$-1<x<\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x>4$$

Disequazioni prodotto

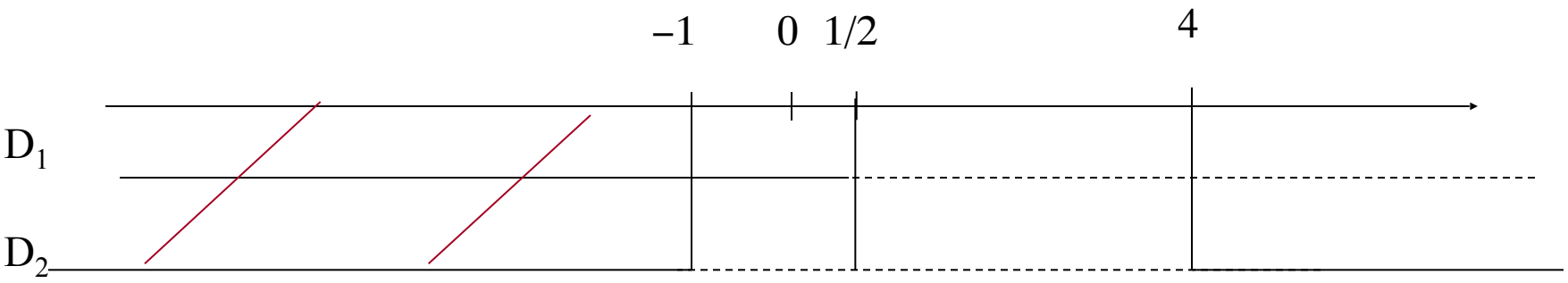
Osservazione 2.

ATTENZIONE!!!

Non confondere disequazioni prodotto con i sistemi di disequazioni!!!

Nei sistemi non si valuta il segno delle disequazioni, **ma le soluzioni comuni i**ndividuate dal tratto di linea continua

$$\begin{cases} (1-2x) > 0 \\ (x^2 - 3x - 4) > 0 \end{cases}$$



Disequazioni prodotto

Esercizio 2. Risolvere la seguente disequazione:

$$(x+1)\cdot(x^2-5x+4)>0$$

Soluzione. Studiamo separatamente il segno dei due fattori

- $x+1>0 \Rightarrow$ $\boxed{x>-1}$

- $x^2-5x+4>0$:

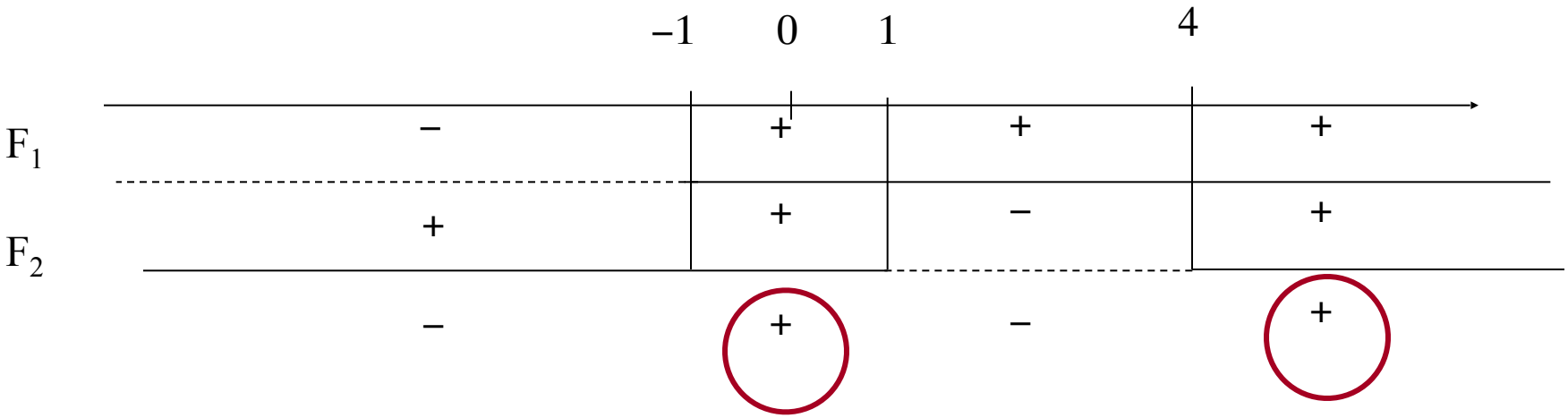
$$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{+5\pm 3}{2} \quad \Rightarrow x_1=1, x_2=4$$

$$\boxed{\Rightarrow x<1 \quad \text{e} \quad x>4}$$

Disequazioni prodotto

$$(x+1)\cdot(x^2-5x+4)>0$$

- $x+1>0$ se $x>-1$
- $x^2-5x+4>0$ se $x<1 \cup x>4$



$$\Rightarrow \quad]-1,1[\cup]4,+\infty[$$

Disequazioni prodotto

Esercizio 3. Risolvere la seguente disequazione:

$$x \cdot \left(x^2 + x + 1\right) < 0$$

Soluzione. Studiamo separatamente il segno dei due fattori

- $F_1 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{x > 0}$
- $F_2 > 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$

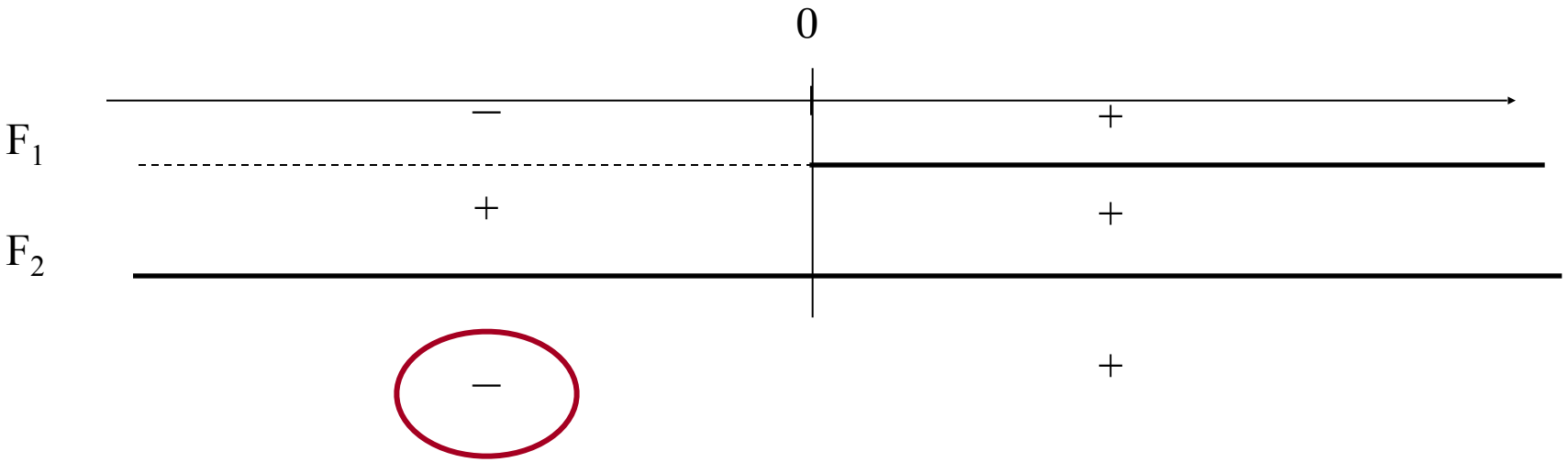
$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \Rightarrow \Delta < 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \forall x \in R}$$

Disequazioni prodotto

$$x \cdot (x^2 + x + 1) < 0$$

- $x > 0$ se $x > 0$
- $x^2 + x + 1 > 0$ se $\forall x \in R$



$$]-\infty, 0[$$

Disequazioni prodotto

Esercizio 4. Risolvere la seguente disequazione:

$$x \cdot (x+1) \cdot (x-1) > 0$$

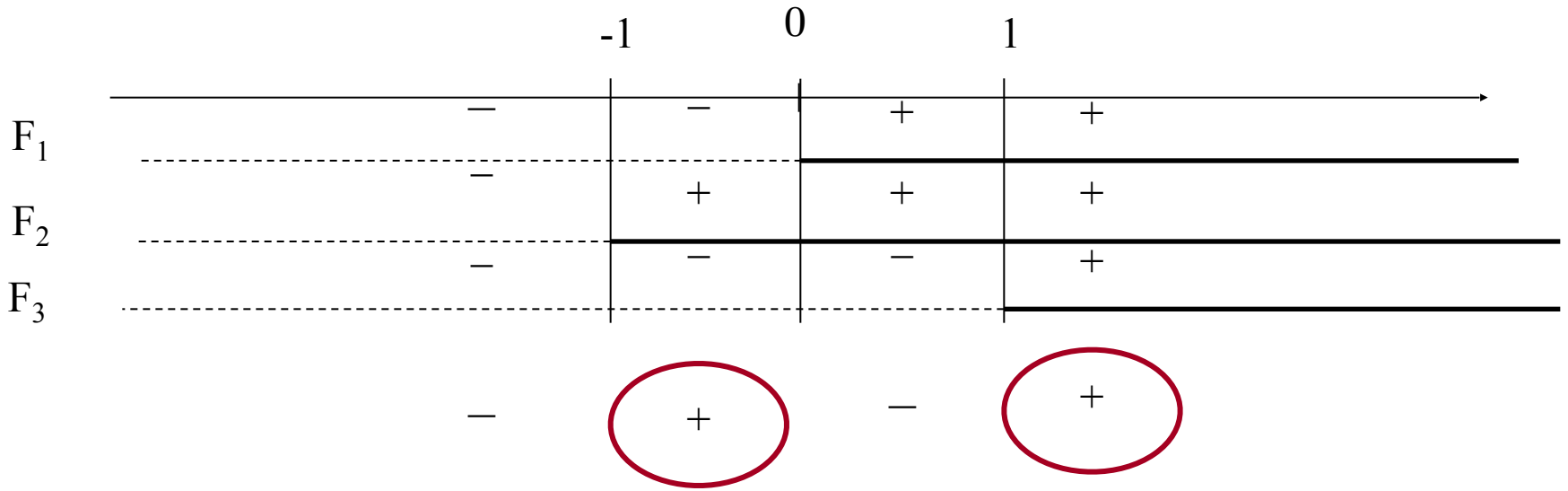
Soluzione. Studiamo separatamente il segno dei tre fattori

- $F_1 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 0}$
- $F_2 > 0 \Longrightarrow x+1 > 0 \quad \boxed{\Longrightarrow x > -1}$
- $F_3 > 0 \Longrightarrow x-1 > 0 \quad \boxed{\Longrightarrow x > 1}$

Disequazioni prodotto

$$x \cdot (x+1) \cdot (x-1) > 0$$

- $x > 0$ se $x > 0$
- $x + 1 > 0$ se $x > -1$
- $x - 1 > 0$ se $x > 1$



$$]-1,0[\cup]1,+\infty[$$

Disequazioni quoziente

Disequazioni quoziente

Una *disequazione quoziente* è una disequazione del tipo:

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} > 0$$

Affinché il **rapporto sia positivo** è necessario che numeratore e denominatore siano **concordi** (cioè abbiano lo stesso segno)

Si possono trovare le soluzioni di una tale disequazione determinando il **segno dei valori assunti dalla Q_1 e dalla Q_2** al variare della *x* e **successivamente il segno del loro rapporto**

Disequazioni quoziente

Osservazione. Se la disequazione è del tipo

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} < 0$$

Affinché il **quoziente sia negativo** è necessario che numeratore e denominatore siano **discordi** (cioè, abbiano segno opposto)

Disequazioni quoziente

Osservazione

Un **quoziente si annulla**

se e solo se

il numeratore è zero e

NON è definito se il denominatore è nullo

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = 0 \Leftrightarrow Q_1(x) = 0$$

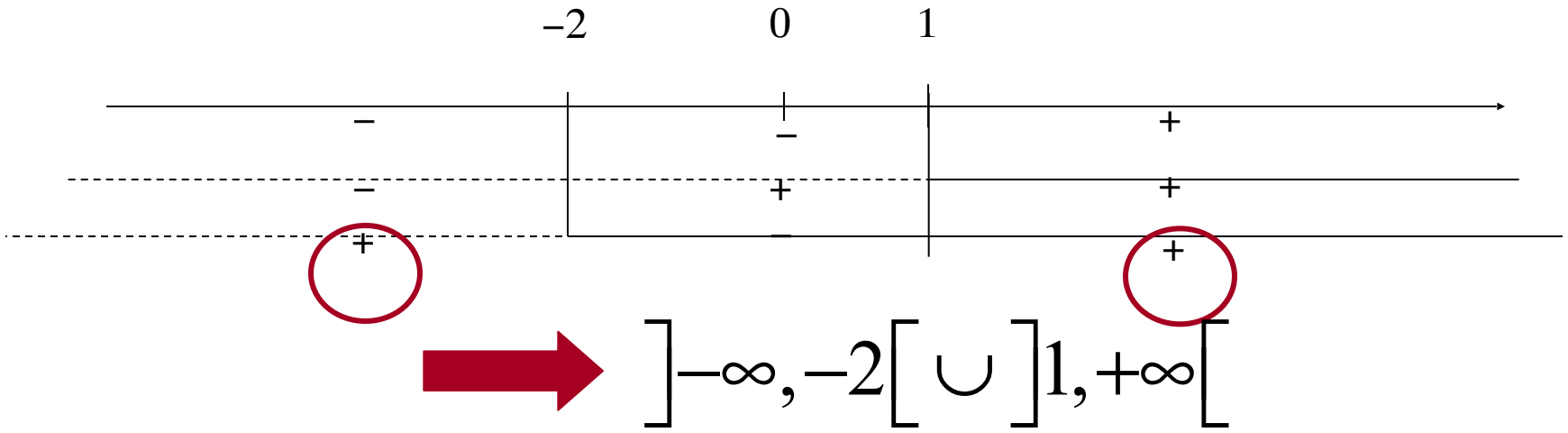
Disequazioni quoziente

Esercizio 1. Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{x-1}{x+2} > 0;$$

Soluzione. Studiamo separatamente il segno delle due funzioni

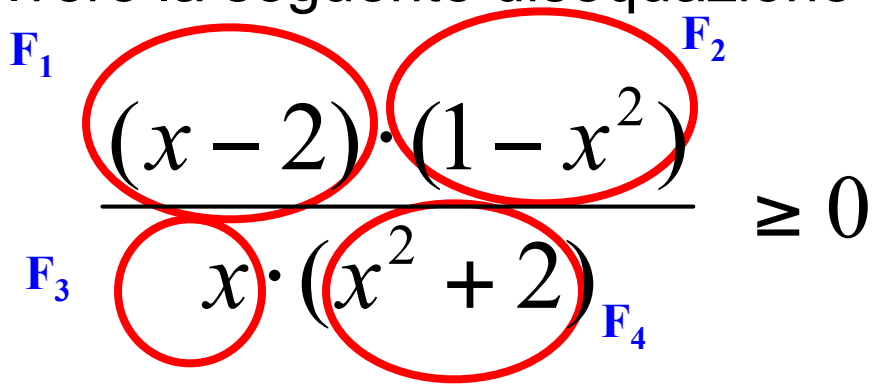
- $x-1>0 \quad \Rightarrow \quad x>1$
- $x+2>0 \quad \Rightarrow \quad x>-2$



$$]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$$

Disequazioni quoziente

Esercizio 1. Risolvere la seguente disequazione fratta:



$$\frac{(x-2)\cdot(1-x^2)}{x\cdot(x^2+2)} \geq 0$$

Soluzione. La disequazione assegnata è costituita da **quattro fattori**. Il segno della disequazione dipenderà dal prodotto dei segni dei 4 fattori.

$$\frac{F_1 \cdot F_2}{F_3 \cdot F_4}$$

Studiamo separatamente il segno delle quattro funzioni

Disequazioni quoziente

Prendiamo ciascuna funzione e la poniamo ≥ 0

(le poniamo solo >0 se nel testo non c'è l'uguale)

$$\frac{(x-2)\cdot(1-x^2)}{x\cdot(x^2+2)} \geq 0$$

F_1 $(x-2) \geq 0$ **$x \geq 2$**

F_2 $(1-x^2) \geq 0$ **$-1 \leq x \leq 1$**

F_3 $x > 0$ **$x > 0$**

F_4 $(x^2+2) > 0$ **$\forall x \in \mathbf{R}$**

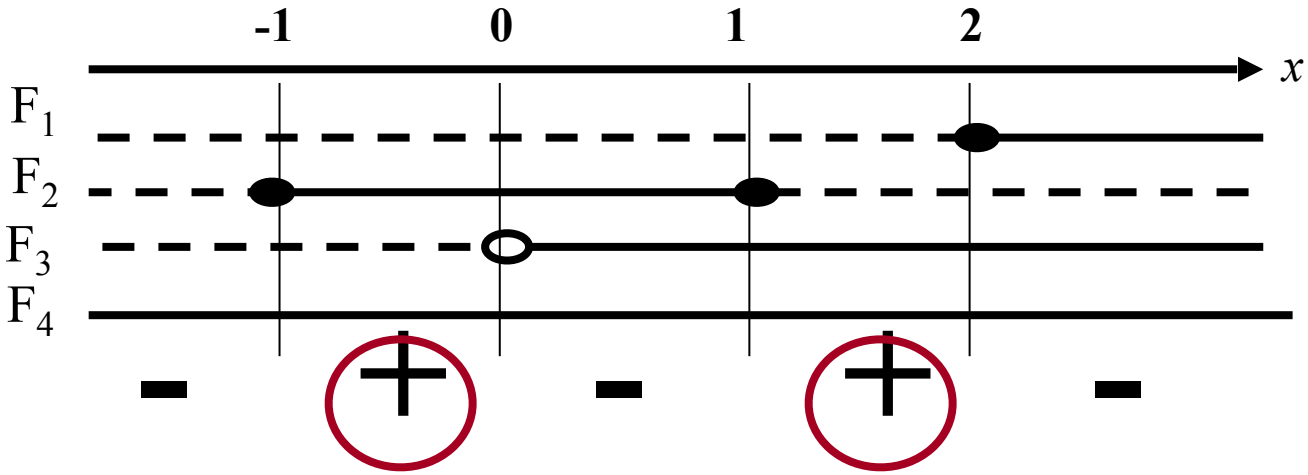
ATTENZIONE!!! Questi fattori **NON vanno posti =0**

perché si trovano al denominatore!

Disequazioni quoziente

Riportiamo i risultati sull'asse reale indicando con una linea continua gli intervalli di positività e una linea discontinua gli intervalli di negatività e poi facciamo il prodotto dei segni delle quattro funzioni.

- $x \geq 2$
- $-1 \leq x \leq 1$
- $x > 0$
- $\forall x \in R$



Allora prendiamo gli intervalli con il segno positivo

$$[-1,0[\cup [1,2]$$

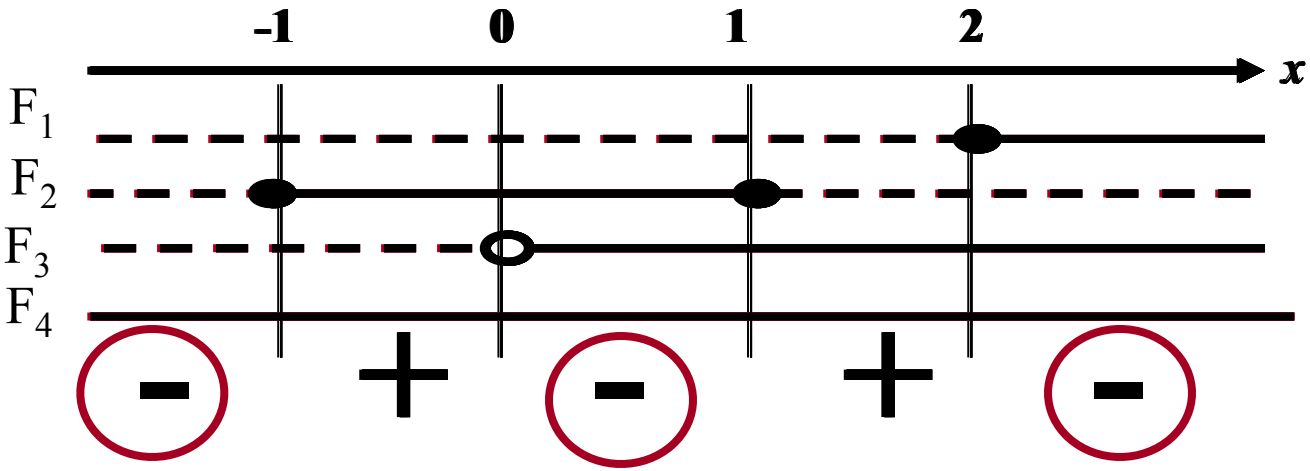
Disequazioni quoziente

Osservazione 1.

Se la disequazione fosse stata **col segno ≤ 0**

$$\frac{(x-2)\cdot(1-x^2)}{x\cdot(x^2+2)} \leq 0$$

Allora avremmo preso gli intervalli con il segno negativo

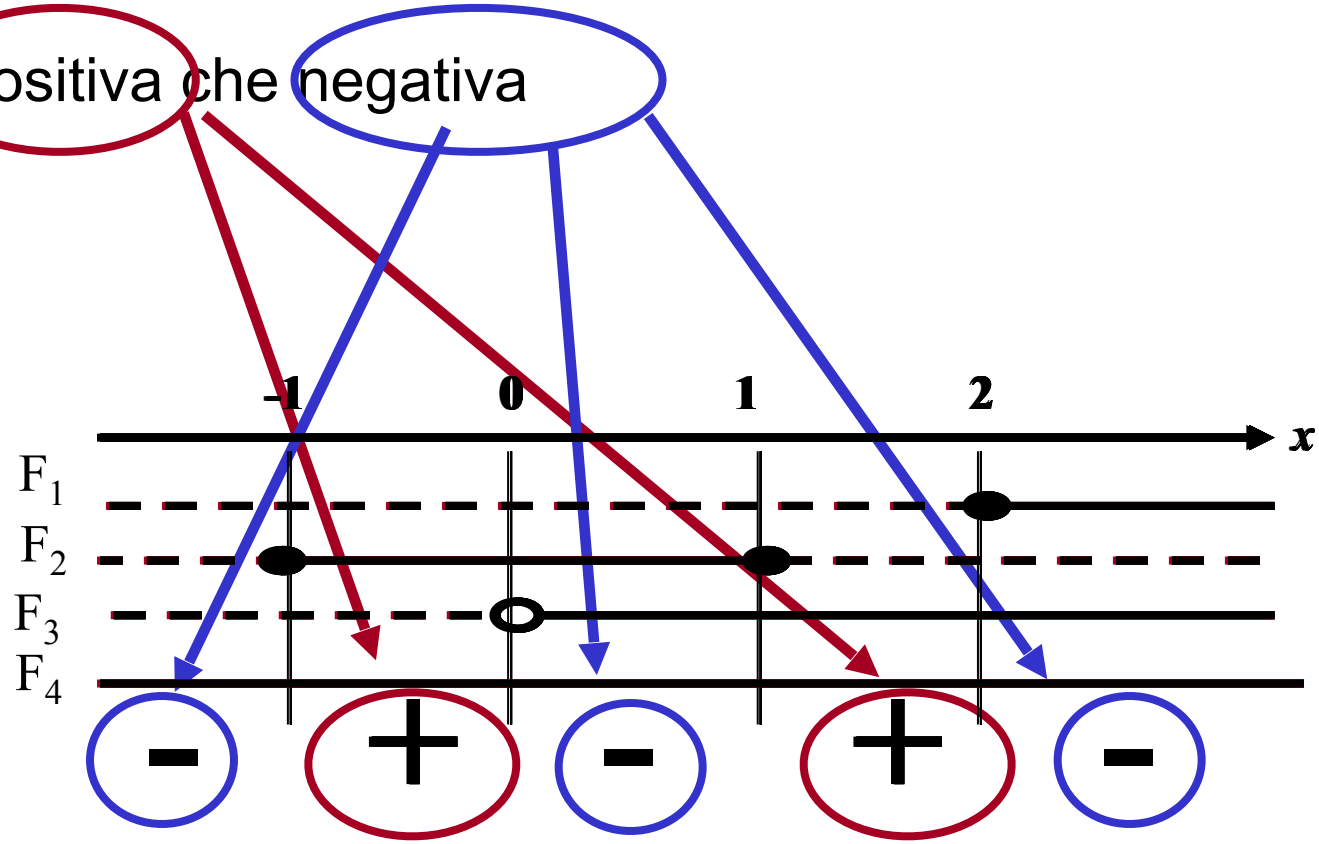


$$\rightarrow \quad]-\infty,-1] \cup]0,1] \cup [2,+\infty[$$

Disequazioni quoziente

Osservazione 2. Quest**o grafico q**uindi ci indica dove l'espressione $\dfrac{(x-2)\cdot(1-x^2)}{x\cdot(x^2+2)}$ è

sia positiva che negativa



Disequazioni quoziente

Esercizio 2. Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{x}{x^2+x+1}+1 \leq 0$$

Soluzione. Riscriviamola con un **unico denominatore**

$$\frac{x+x^2+x+1}{x^2+x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1} \leq 0$$

Si annulla per x= -1

Studiamo il **segno di numeratore e denominatore**

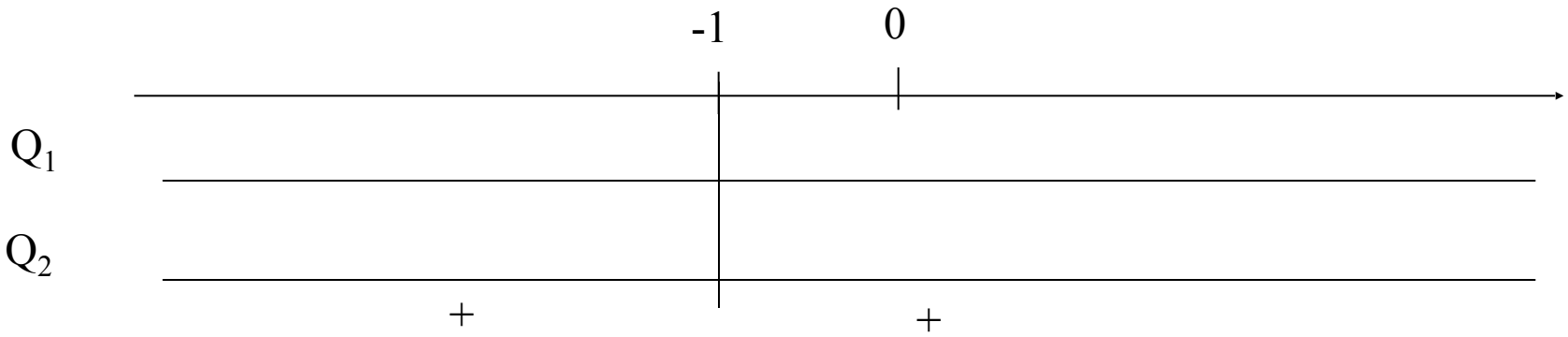
- $x^2+2x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$
- $x^2+x+1 > 0; \ \Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in R$

Disequazioni quoziente

Si annulla per x= -1

- $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \forall x \in R$
- $x^2 + x + 1 > 0; \quad \Rightarrow \forall x \in R$

Ricordiamoci che il segno della disequazione di partenza è ≤



Il rapporto non è mai negativo in tutto *R*.

Però **nel punto x=-1 si annulla in quanto si annulla il numeratore!!!**

x= -1 è soluzione

Disequazioni quoziente

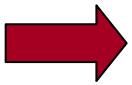
Esercizio 3. Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$-1-\frac{1}{x^2+1}\geq 0$$

Soluzione. Riscriviamola con un **unico denominatore**

$$\frac{-x^2-1-1}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-\left(x^2+2\right)}{x^2+1}\geq 0$$

Per risolvere la disequazione basta osservare che: il **denominatore** è **sempre strettamente positivo** e che il **numeratore** è **sempre strettamente negativo**



La disequazione NON è mai verificata

Disequazioni quoziente

Esercizio 4. Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{3}{x^2+4}-\frac{3}{x^2+5}>0$$

Soluzione. Calcoliamo il **m.c.m. dei quozienti al I membro**

$$\frac{3\left(x^2+5\right)-3\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+5\right)}>0 \Rightarrow \frac{3\left(x^2+5-x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+5\right)}>0$$

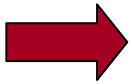
$$\Rightarrow \frac{3}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+5\right)}>0$$

Disequazioni quoziente

$$\Rightarrow \frac{3}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+5\right)} > 0$$

Per risolvere la disequazione basta osservare che:

- il **numeratore** è un **numero positivo**,
- il **denominatore** è il **prodotto di due fattori sempre strettamente positivi**



$\forall x \in R$ è la soluzione

Disequazioni quoziente

Esercizio 5. Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{4x+9}{x^2+1} < -3$$

Soluzione. Riscriviamola con un **unico denominatore**

$$\frac{4x+9+3x^2+3}{x^2+1} < 0 \quad \Rightarrow \frac{3x^2+4x+12}{x^2+1} < 0$$

Studiamo il **segno di numeratore e denominatore**

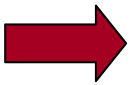
- $3x^2+4x+12 > 0 \quad \Rightarrow \Delta = 16-144 = -128 < 0 \Rightarrow \forall x \in R$
- $x^2+1 > 0 \quad \Rightarrow \forall x \in R$

Disequazioni quoziente

$$\frac{3x^2+4x+12}{x^2+1}<0$$

- $3x^2+4x+12>0 \Rightarrow \forall x \in R$
- $x^2+1>0 \Rightarrow \forall x \in R$

Quindi sia **numeratore che denominatore sono sempre strettamente positivi**



La disequazione NON è mai verificata

Disequazioni quoziente

Esercizio 7. Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{x} \geq 0 \\ \dfrac{x-\sqrt{2}}{5x} \leq 0 \\ x^3 + x > 0 \end{cases}$$

$0 < x \leq \sqrt{2}$ è la soluzione