Precorso Matematica

Richiami di trigonometria
(introduzione alla misura degli angoli ed alle funzioni trigonometriche)

Tiziana Pacelli
tiziana.pacelli@unina.it
https://www.docenti.unina.it/tiziana.pacelli

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Per definire le funzioni trigonometriche e determinarne le caratteristiche, introduciamo prima le nozioni di

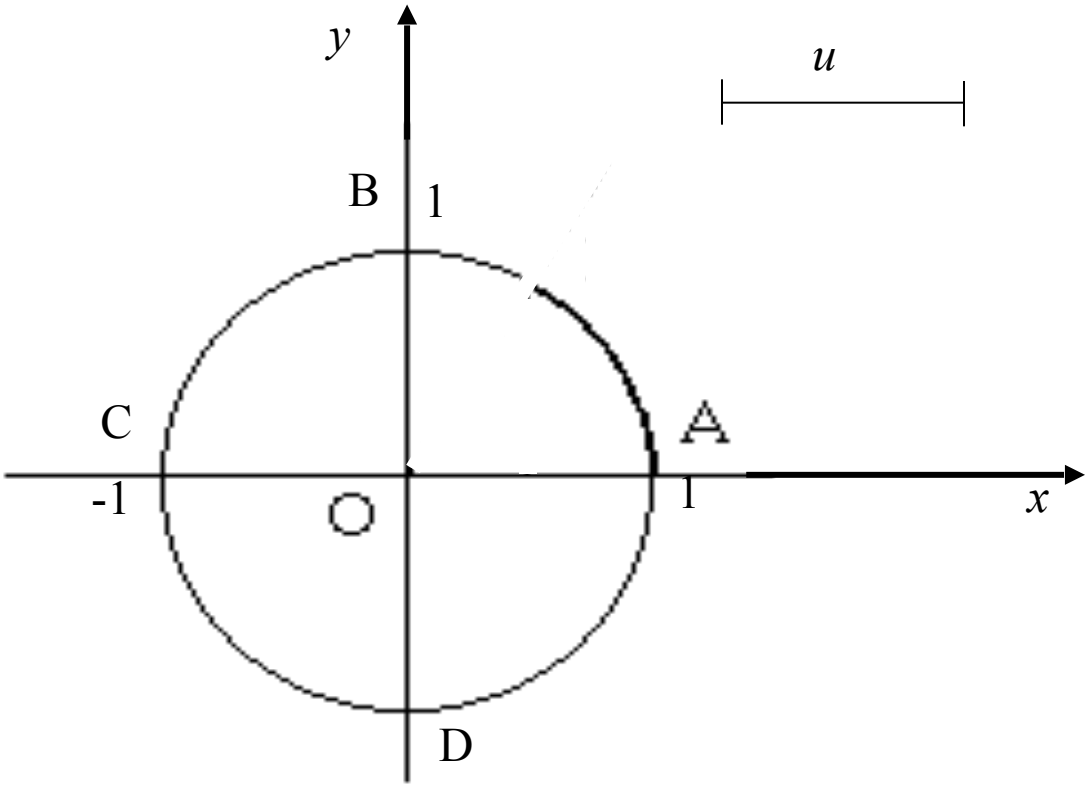
circonferenza goniometrica e radiante

Circonferenza goniometrica

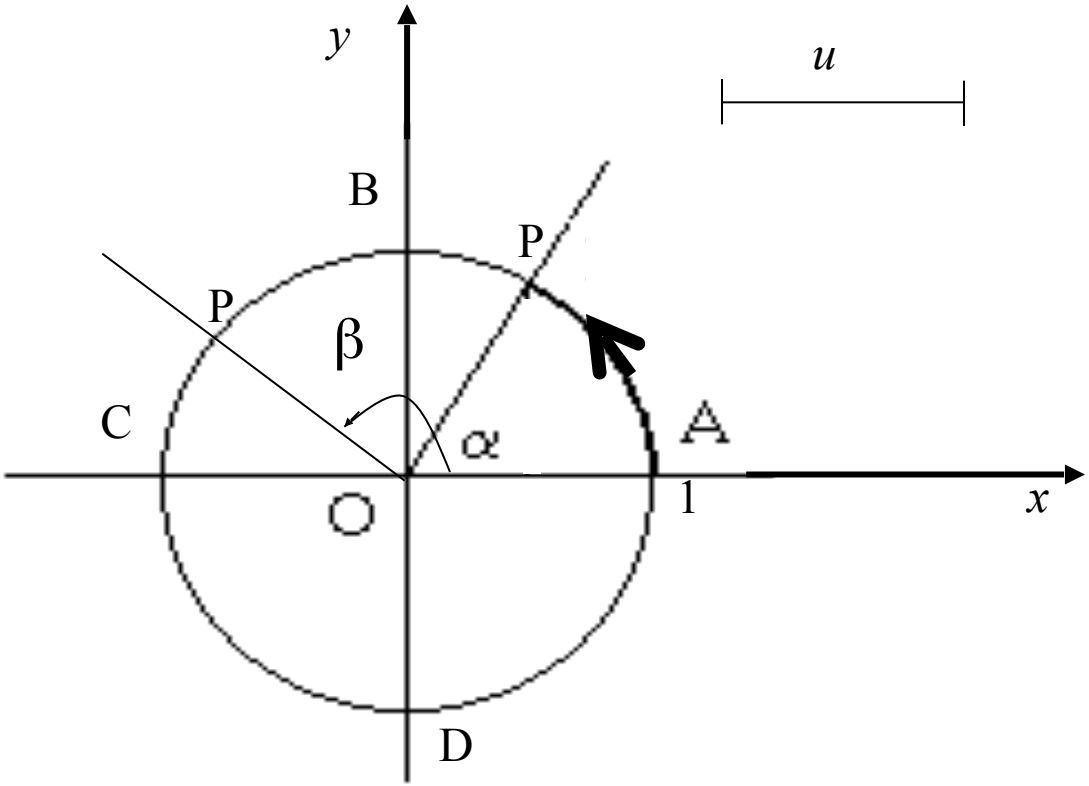
In un s**istema di assi cartesiani ortogonali**, consideriamo una circonferenza di **centro l'origine** e **raggio unitario** (pari, cioè, all'unità di misura fissata). Tale circonferenza viene detta

circonferenza goniometrica

A (1,0)
B (0,1)
C (-1,0)
D (0,-1)



Circonferenza goniometrica

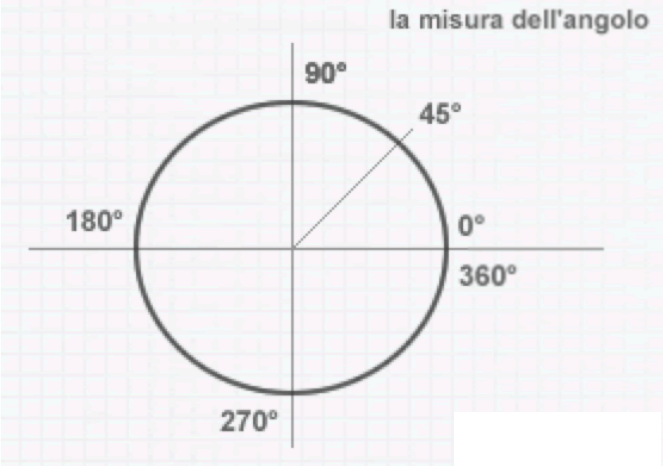


Per convenzione, tale circonferenza **viene percorsa positivamente in senso antiorario a partire dal punto A** origine degli archi.

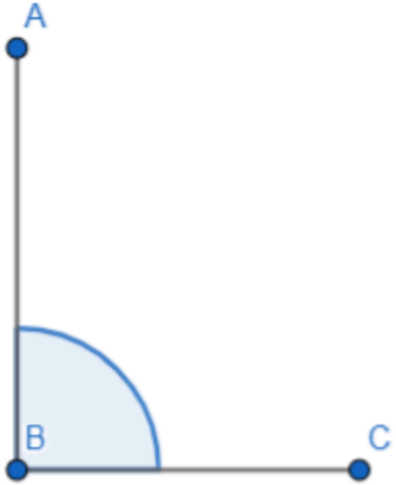
In questo modo la **congiungente l'origine O con il generico punto P** che si muove sulla circonferenza goniometrica forma con l'asse *x* un **angolo α, β,…**

Angoli

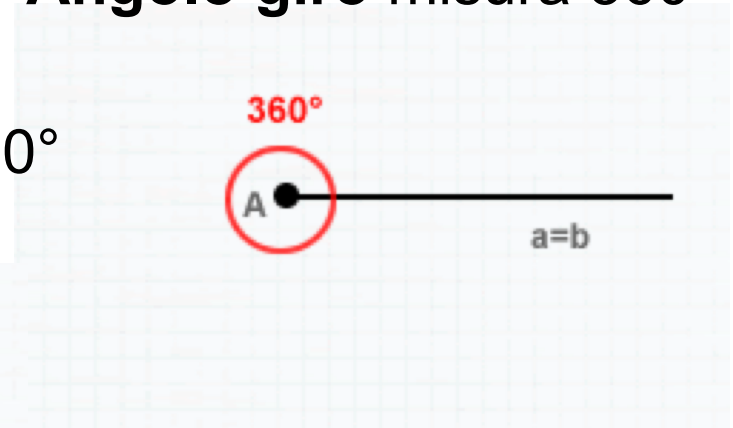
In generale, siamo in grado di **misurare gli angoli in gradi**



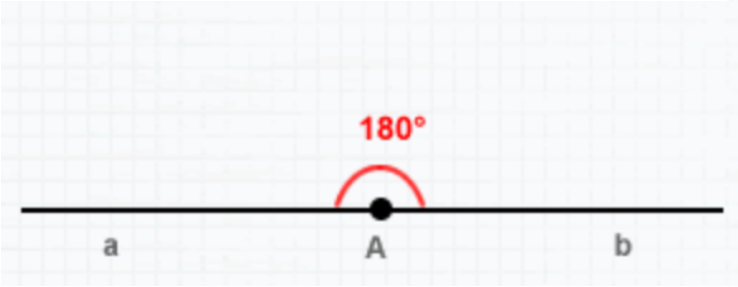
Angolo retto misura 90°



Angolo giro misura 360°



Angolo piatto misura 180°

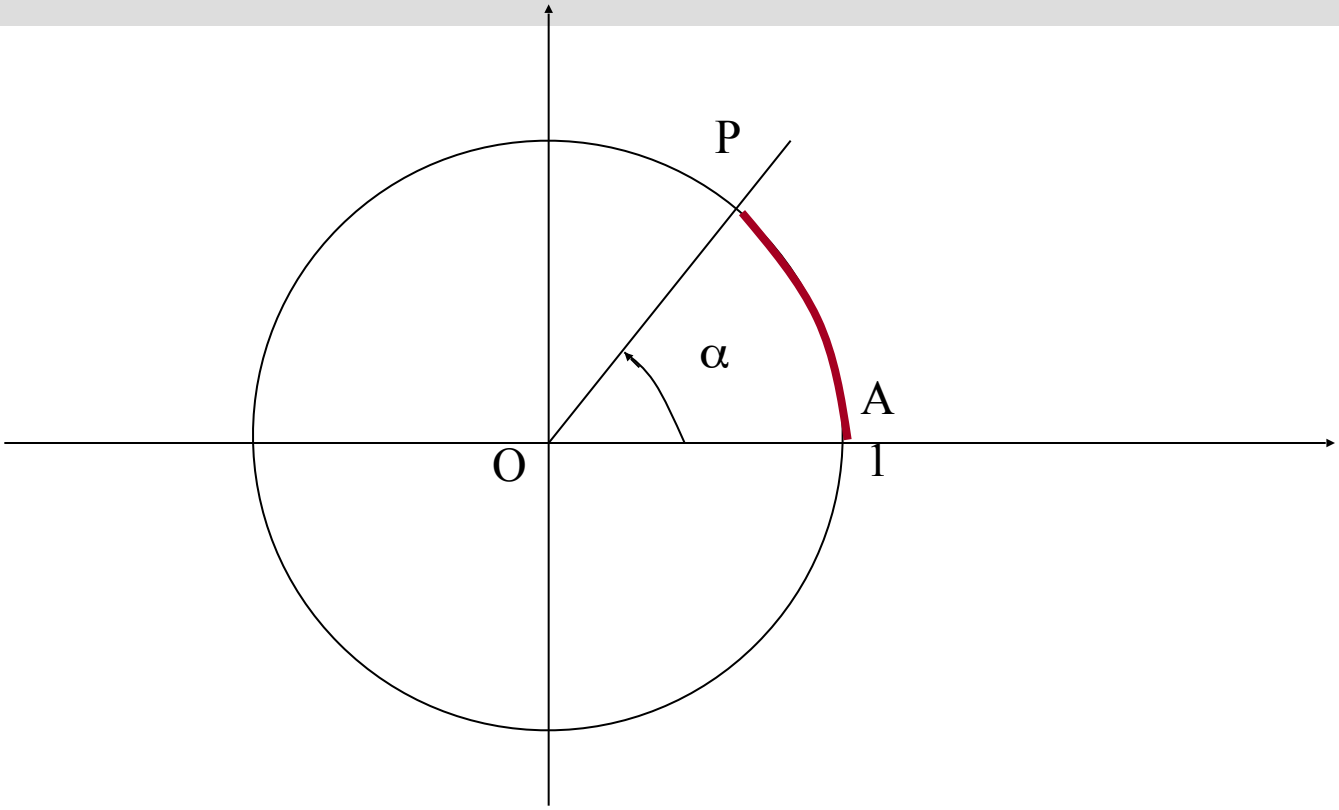


Angoli

Per studiare le funzioni trigonometriche è opportuno adottare una **diversa unità di misura per gli angoli:**

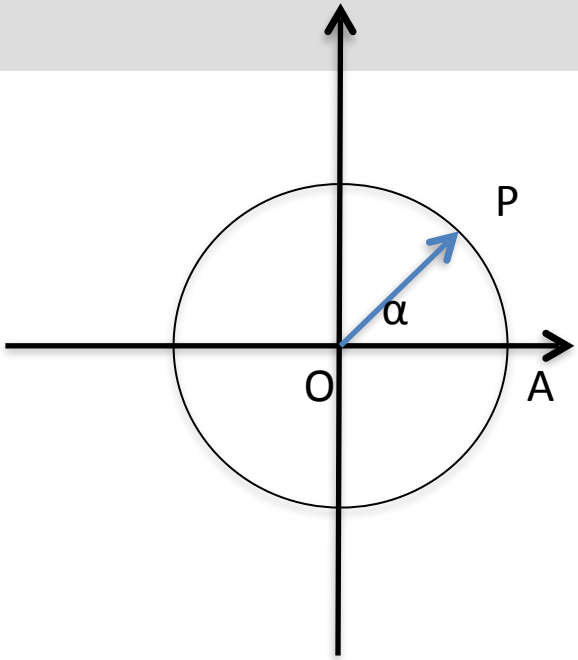
il radiante

Angoli



Def. La **misura** di un **angolo piano α** espressa in ***radianti*** è data dalla **lunghezza dell'arco *AP*** di circonferenza goniometrica intercettato dalle due semirette che individuano l'angolo stesso

Angoli



La **lunghezza dell'arco individuata da un angolo è proporzionale all'angolo,** infatti se raddoppiamo l'angolo si raddoppia anche l'arco di circonferenza da esso individuato.

Un angolo di 1 radiante è un angolo il cui arco corrispondente ha la lunghezza del raggio.

Un angolo di α radianti corrisponde ad un arco di circonferenza lungo αr.

Per ragioni di comodità si considera allora
la **circonferenze trigonometrica di raggio unitario.**

Angoli

In particolare, poiché la circonferenza misura $2\pi r$ se $r=1$ la **lunghezza della circonferenza è pari a 2π,**

l'angolo giro (360°) misura in radianti 2π.

Angolo piatto misura π
(è uguale alla lunghezza di metà circonferenza unitaria: $r = 1$)

Angolo retto misura in radianti $\pi/2$
(è uguale alla lunghezza di un quarto di circonferenza unitaria: $r = 1$)

Numeri Reali

$$\alpha^\circ / 360^\circ = \alpha / 2\pi$$

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π

Angoli

$$\alpha° / 360° = \alpha / 2\pi$$

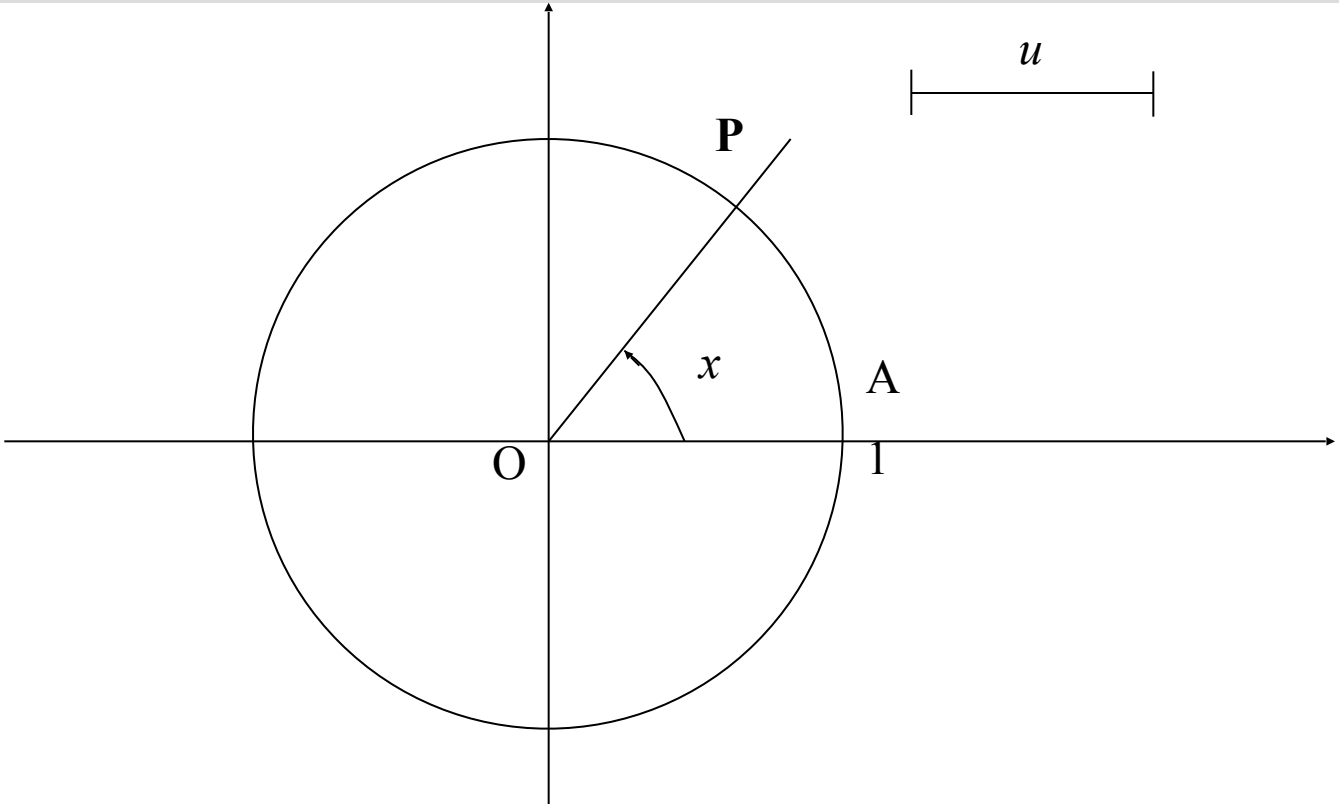
Si passa dai gradi ai radianti con la seguente proporzione:

$$\alpha° : 180° = \alpha^{rad} : \pi$$

Con successive suddivisioni si verifica che:

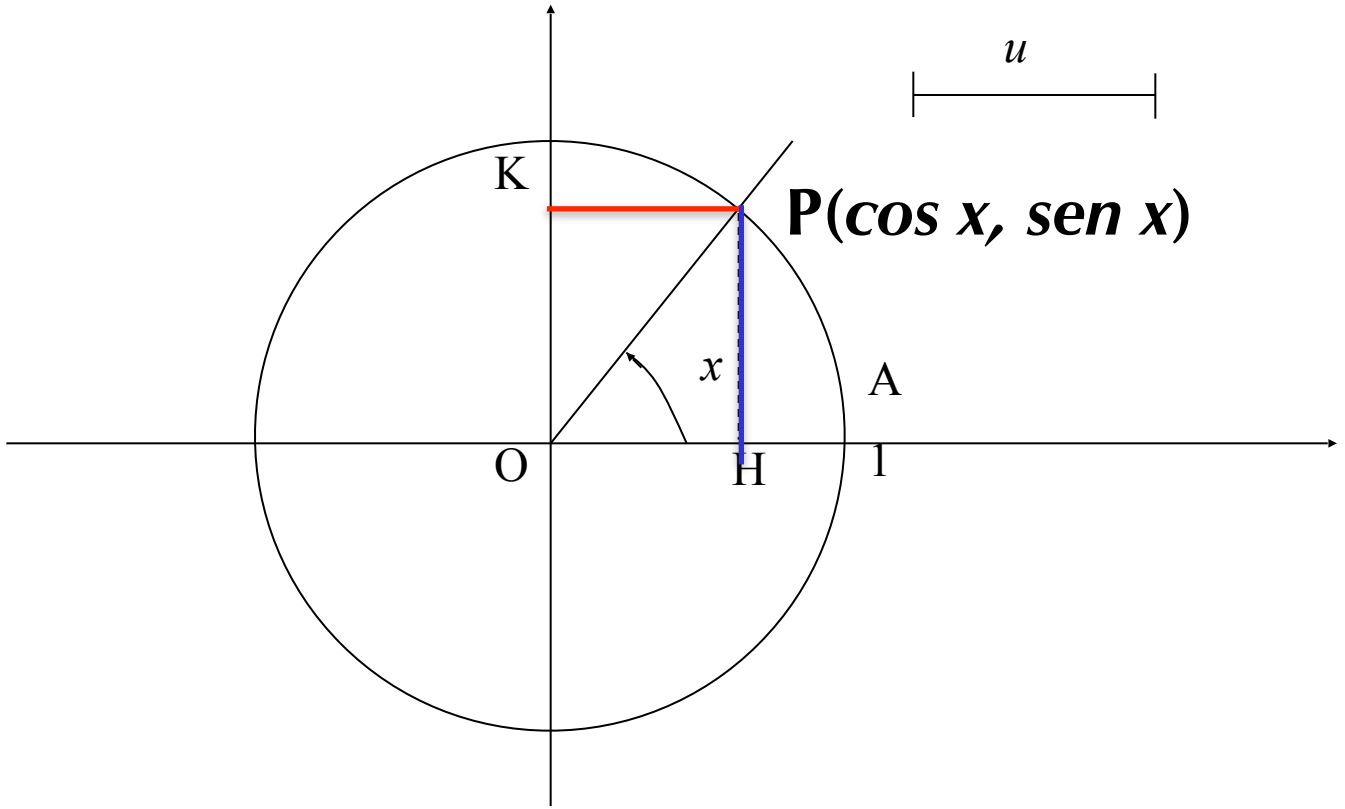
gradi	radianti
360°	2 π
180°	π
90°	π/2
45°	π/4
60°	π/3
30°	π/6
120°	2/3 π
270°	3/2 π

Funzioni trigonometriche



Sia dato un **punto *P* che si muove sulla circonferenza goniometrica a partire dal punto *A*** origine degli archi e sia ***x* l'angolo sotteso dal punto *P***

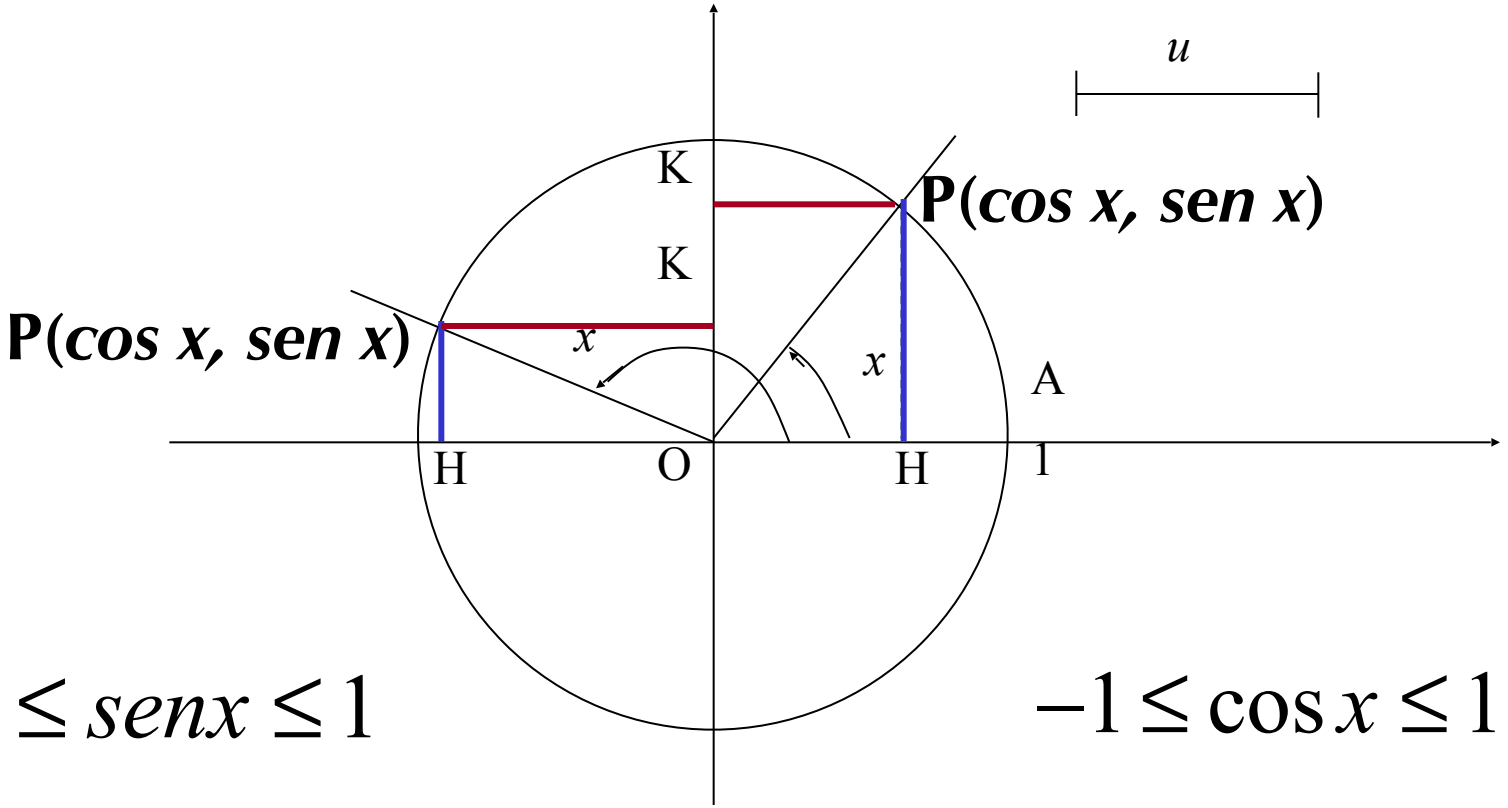
Funzioni trigonometriche



Def. Si definisce *sen x* **l'ordinata** del punto P (cioè il segmento PH)

Def. Si definisce *cos x* **l'ascissa** del punto P (cioè il segmento PK)

Funzioni trigonometriche



$$-1 \le senx \le 1$$

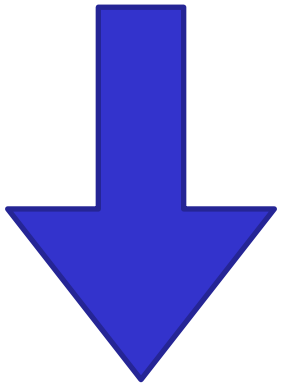
$$-1 \le \cos x \le 1$$

Quando il **punto *P* si muove sulla circonferenza** goniometrica variano:

- l'**ampiezza dell'angolo x** sotteso dal punto *P*
- l'**ascissa** e l'**ordinata** del punto *P*

Funzioni trigonometriche

Al variare di *x* variano i valori di *sen x* e *cos x*

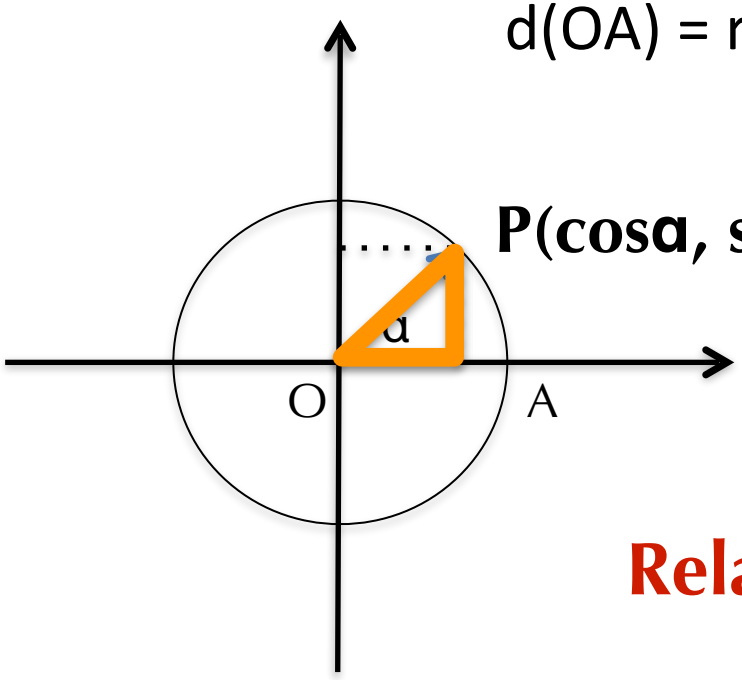


sen x e *cos x* sono **FUNZIONI**

$$\sin x: x \in \mathrm{R} \rightarrow \sin x \in [-1, 1]$$

$$\cos x: x \in \mathrm{R} \rightarrow \cos x \in [-1, 1]$$

Funzioni trigonometriche



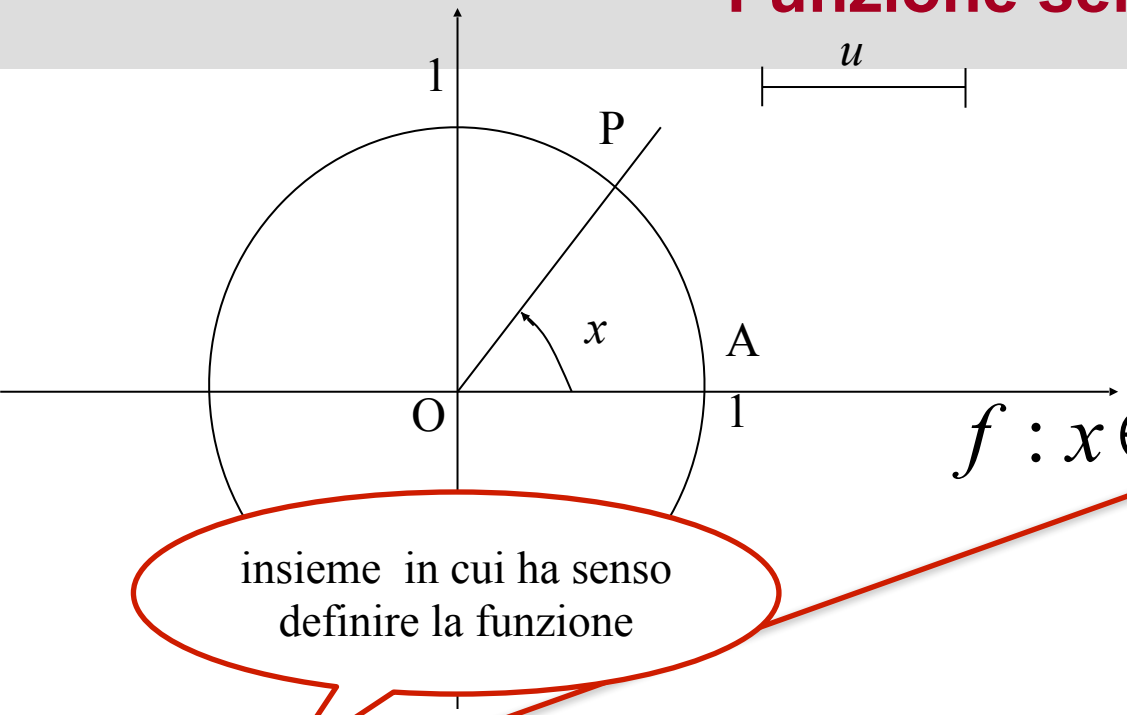
- L'ordinata del punto P è sinα
- L'ascissa del punto P è cosα

Relazione fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

α	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
sinα	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1

Funzione seno



$$f(x) = sen\, x$$

$$f : x \in R \rightarrow sen\, x \in [-1,+1]$$

insieme in cui ha senso definire la funzione

Il dominio è tutto *R* poiché un punto *P* che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri (ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)

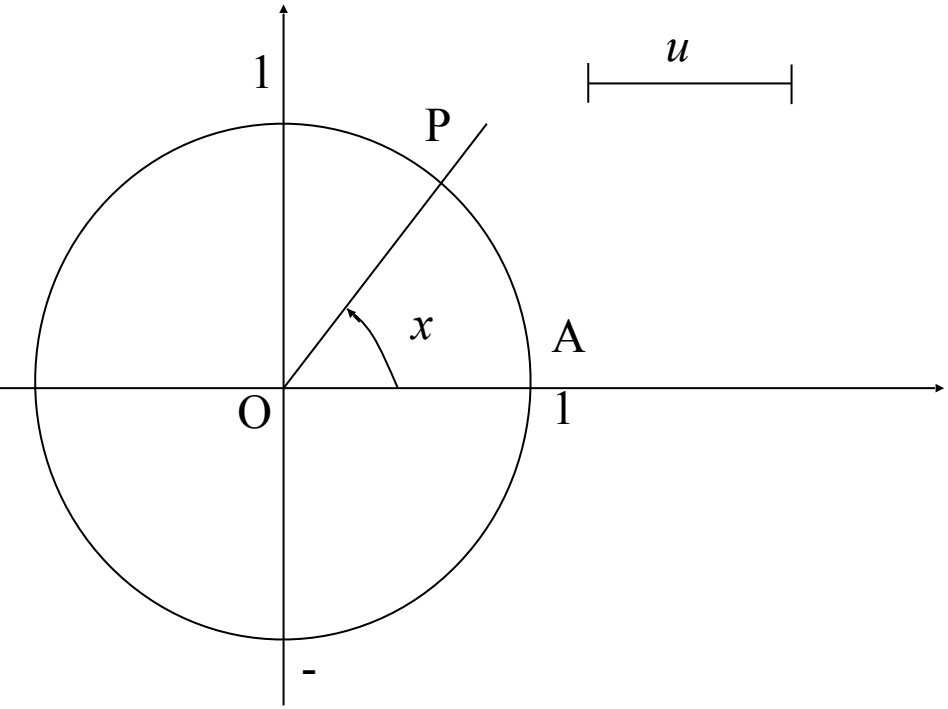
insieme di tutti i valori assunti dalla funzione

Il codominio è *R*

L'insieme delle Immagini è l'intervallo [-1,+1] poiché il minimo valore che può assumere l'ordinata del punto *P* è -1, mentre il massimo valore è +1

Funzione seno

Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione seno assume un corrispondente valore numerico



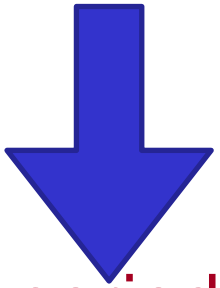
x	*sen x*
0	0
π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π/2	1
π	0
π/6	1/2
π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3/2 π	-1
2 π	0

OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π)

la funzione $sen\ x$

assume gli stessi valori



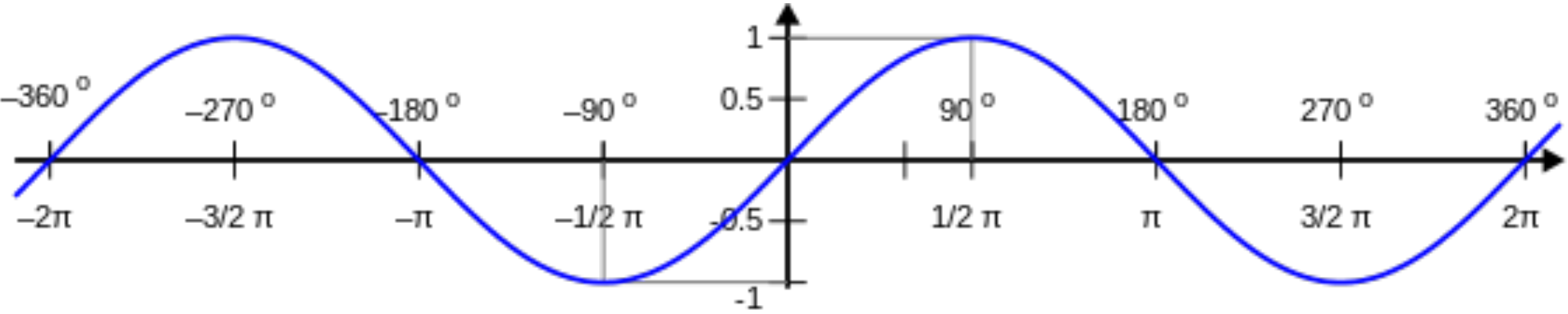
la funzione seno è periodica di periodo 2π

$$sen(x + 2\pi) = sen\, x, \forall x \in R$$

sen(x+2πk) = sen x per ogni k intero

Funzione seno

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione seno al variare di x nel dominio R, **il grafico della funzione seno, dato dai punti (*x*, *sen x*), è:**



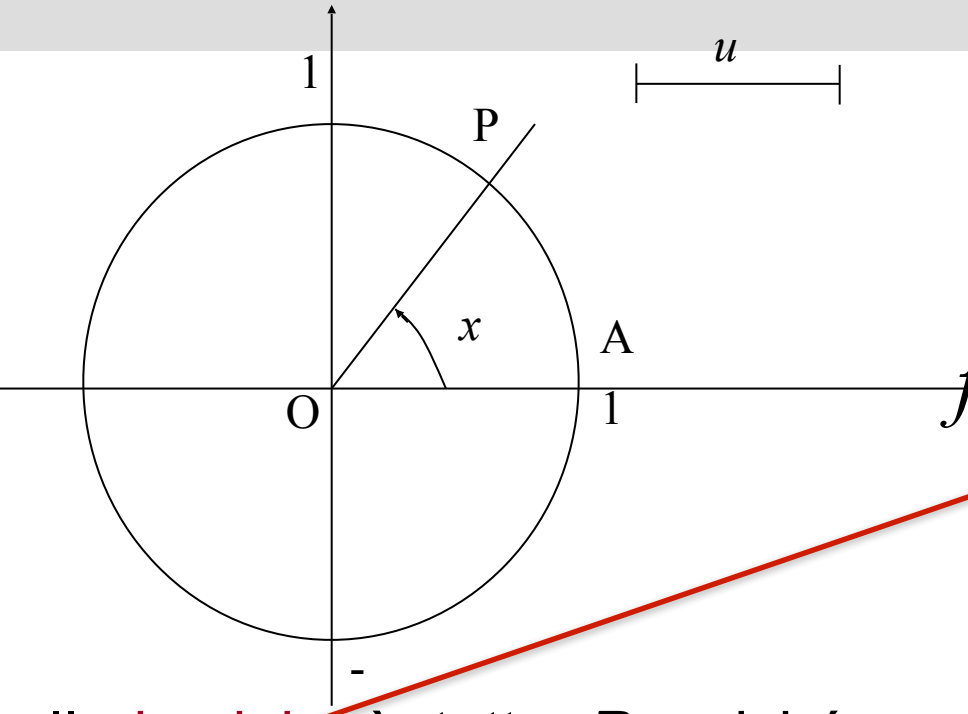
f è limitata : $\sup\ senx = \max senx = 1; \inf senx = \min senx = -1$

f strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in Z$

f strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right], k \in Z$

f dispari : $-senx = sen(-x)$

Funzione coseno



$$f(x) = \cos x$$

$$f : x \in R \rightarrow \cos x \in [-1,+1]$$

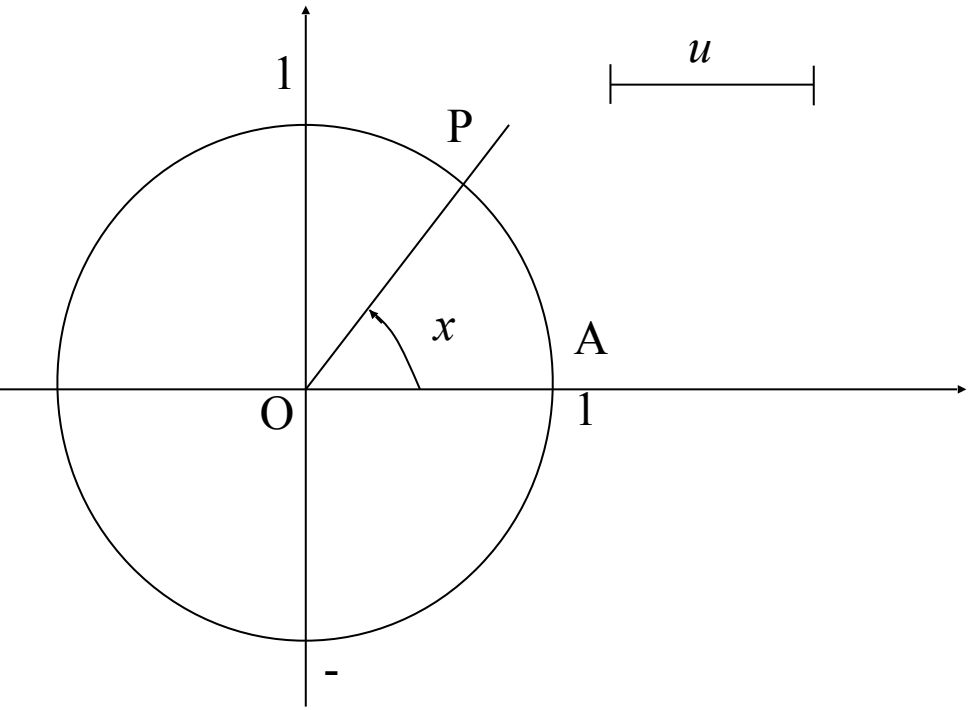
Il dominio è tutto *R* poiché un punto *P* che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri (ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)

Il codominio è *R*

L'insieme delle Immagini è l'intervallo [-1,+1] poiché il minimo valore che può assumere l'ordinata del punto *P* è -1, mentre il massimo valore è +1

Funzione coseno

Per ogni valore fissato dell'angolo x, la funzione coseno assume un corrispondente valore numerico



x	*cos x*
0	1
π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π/2	0
π	-1
π/6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
π/3	1/2
3/2 π	0
2 π	1

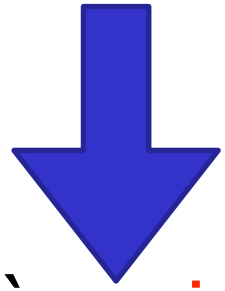
Funzione coseno

OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π)

la funzione $\cos x$

assume gli stessi valori



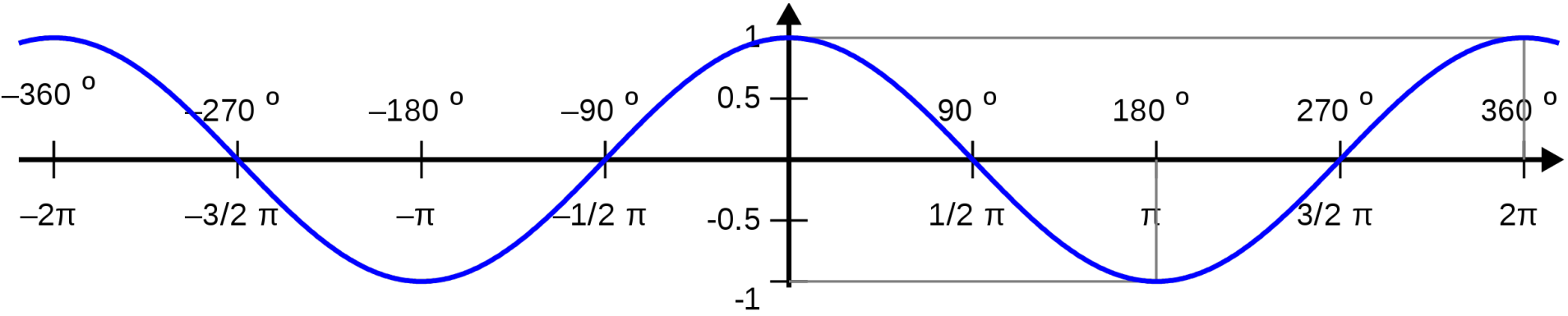
la funzione coseno è periodica di periodo 2π

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in R$$

$\mathbf{\cos(x+2\pi k) = \cos x}$ per ogni k intero

Funzione coseno

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione coseno al variare di *x* nel dominio *R*, il **grafico della funzione coseno, dato da tutti i punti (*x*, *cos x*)è:**



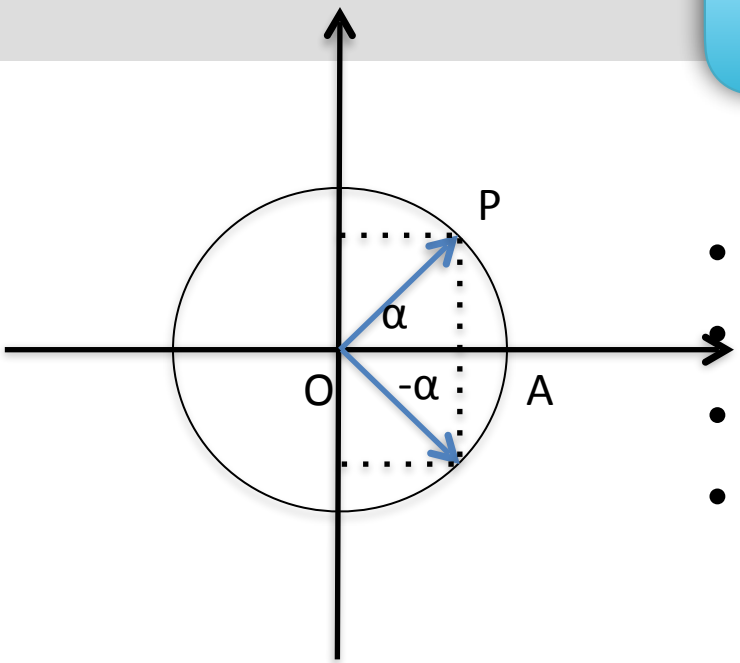
f è limitata : $\sup \cos x = \max \cos x = 1; \inf \cos x = \min \cos x = -1$

f strettamente crescente in $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \; k \in Z$

f strettamente decrescente in $[2k\pi, \pi + 2k\pi] \; k \in Z$

f pari : $\cos x = \cos(-x)$

Alcune proprietà



- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
- $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi)= -\cos\alpha$
- $\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(\pi/2-\alpha)= \sin\alpha$

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

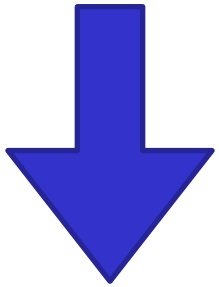
$$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$$

Funzione tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

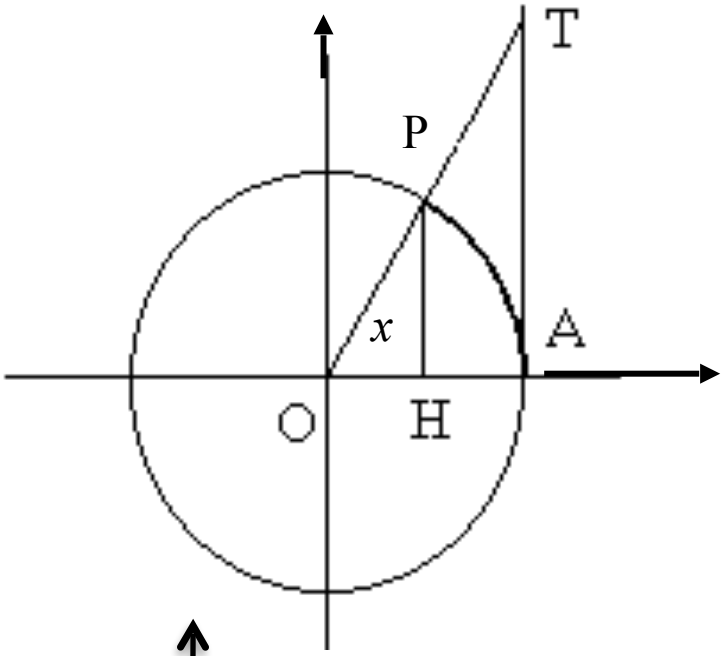
Affinchè abbia senso il rapporto $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$,

deve essere il denominatore $\cos x \neq 0$



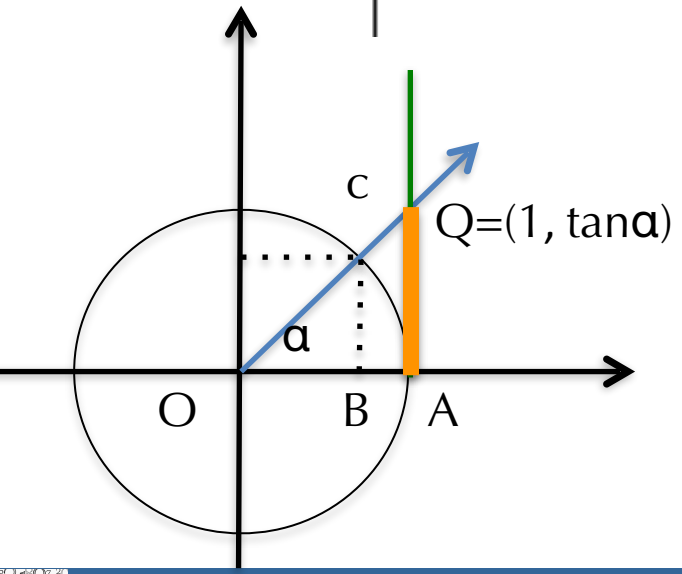
Il dominio è tutto *R* privato dei valori *x* che annullano il coseno al denominatore

Funzione tangente



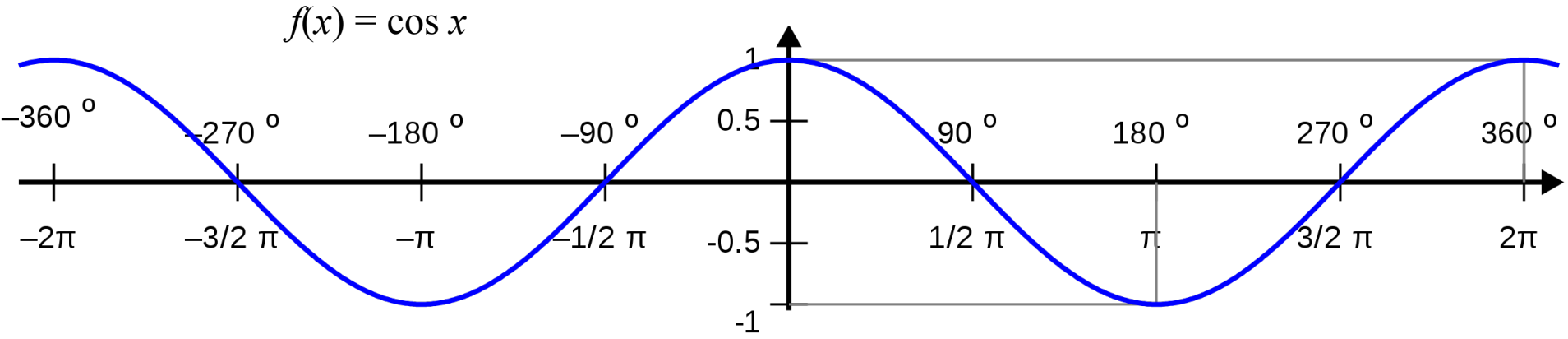
Si può inoltre dimostrare che **tg** x è

l'**ordinata del punto T di intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A e la semiretta OP**



$$\frac{AQ}{OA} = \frac{CB}{OB} \qquad \frac{\tan\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Funzione tangente



$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$$

$$\tan x: x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad k \in Z \rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \in R$$

$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

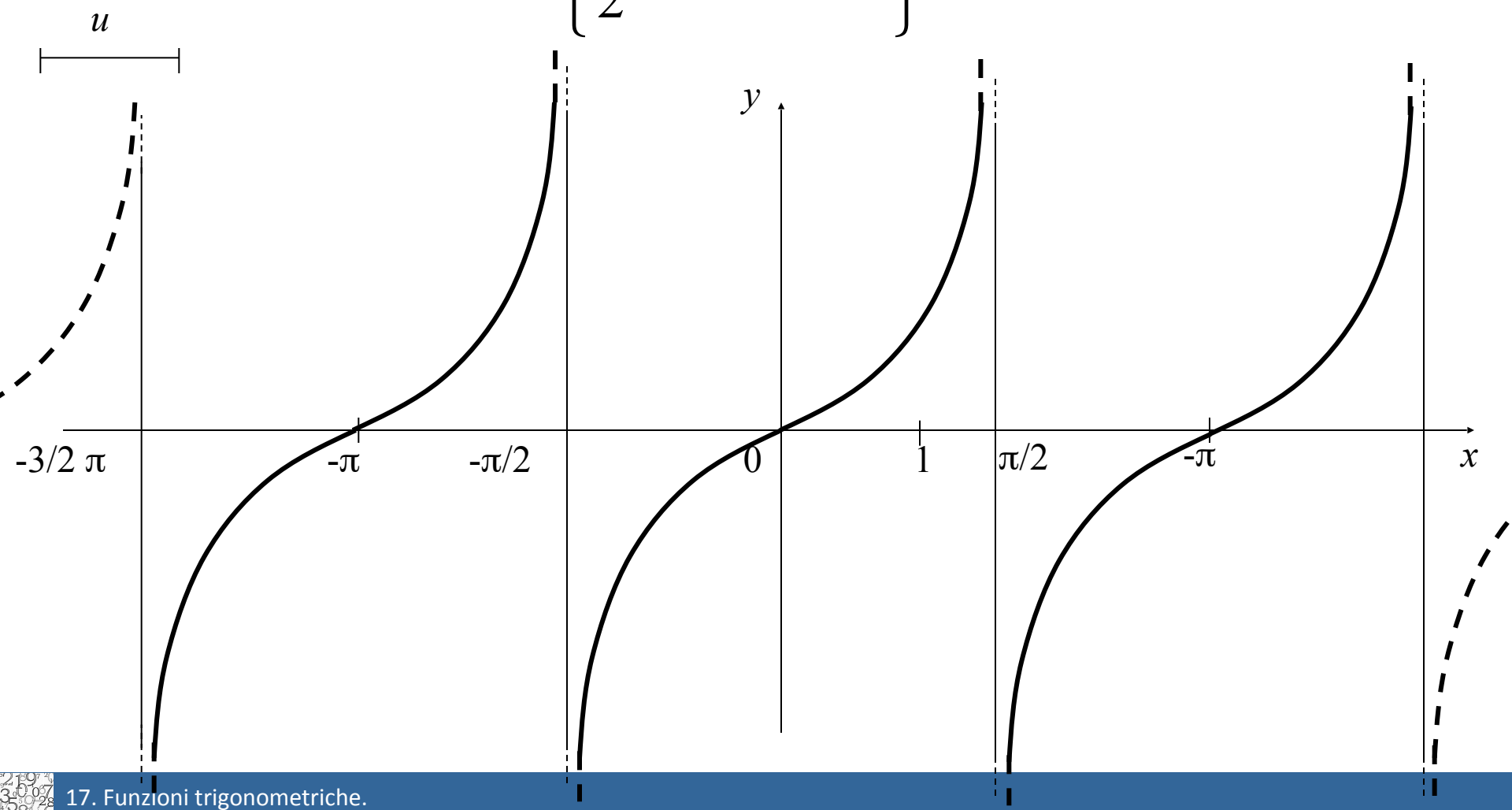
Funzione tangente

$$f(x) = \tan x$$

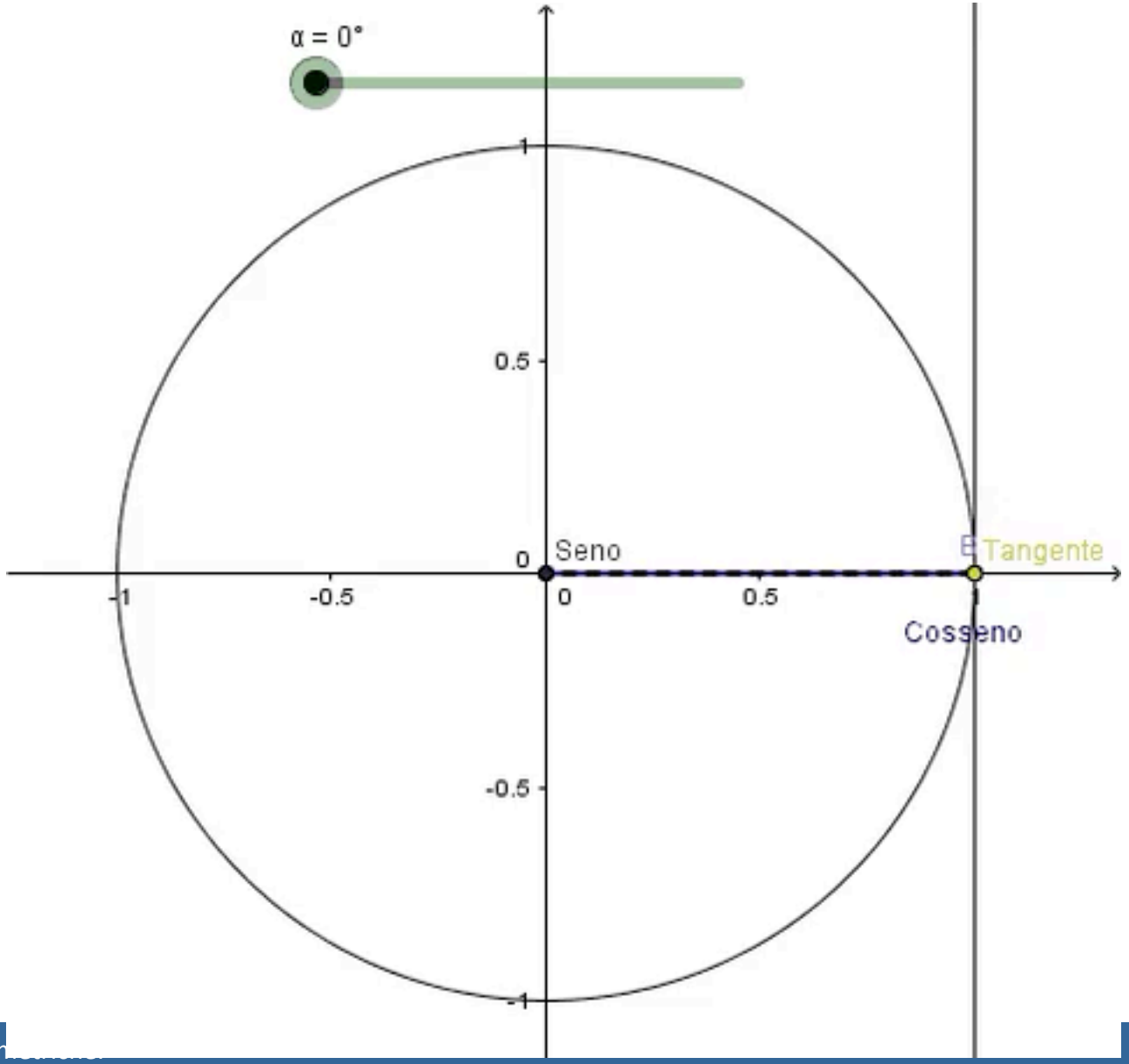
Dominio

Codominio

$$f : x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in Z \right\} \rightarrow \tan x \in R$$



Funzione tangente



Funzione tangente

Per ogni valore fissato dell'angolo x, la funzione tangente assume un corrispondente valore numerico

x	***tan x***
0	0
π/4	1
π/2	/
π	0
π/6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
π/3	$\sqrt{3}$
3/2 π	/
2 π	0

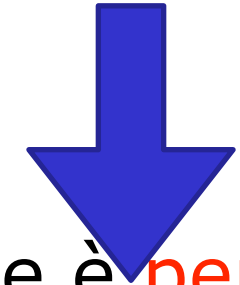
Funzione tangente

OSSERVAZIONE

Ogni mezzo giro (pari a metà arco che misura π)

la funzione $tan\ x$

assume gli stessi valori



la funzione tangente è periodica di **periodo** π

$$\tan(x+\pi) = \tan x,$$

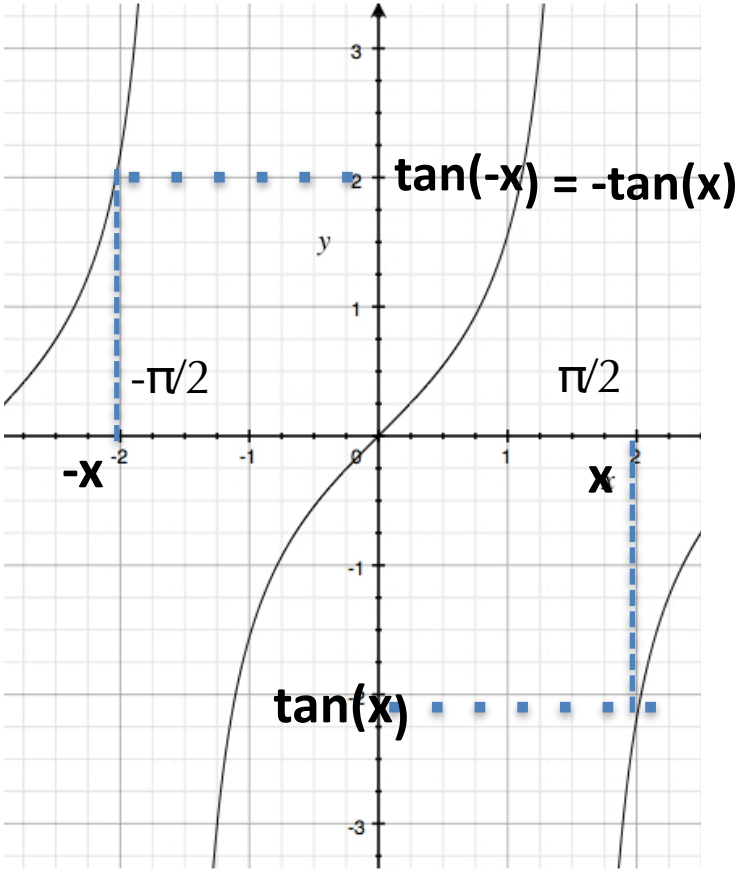
$$\forall x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in Z \right\}$$

Funzione tangente

La funzione tangente è pari o dispari ?

Dispari: simmetrica rispetto all'origine

tan(-x)= - tan(x)



La funzione tangente dove è positiva?

positiva: $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

negativa: $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k+1)\pi$

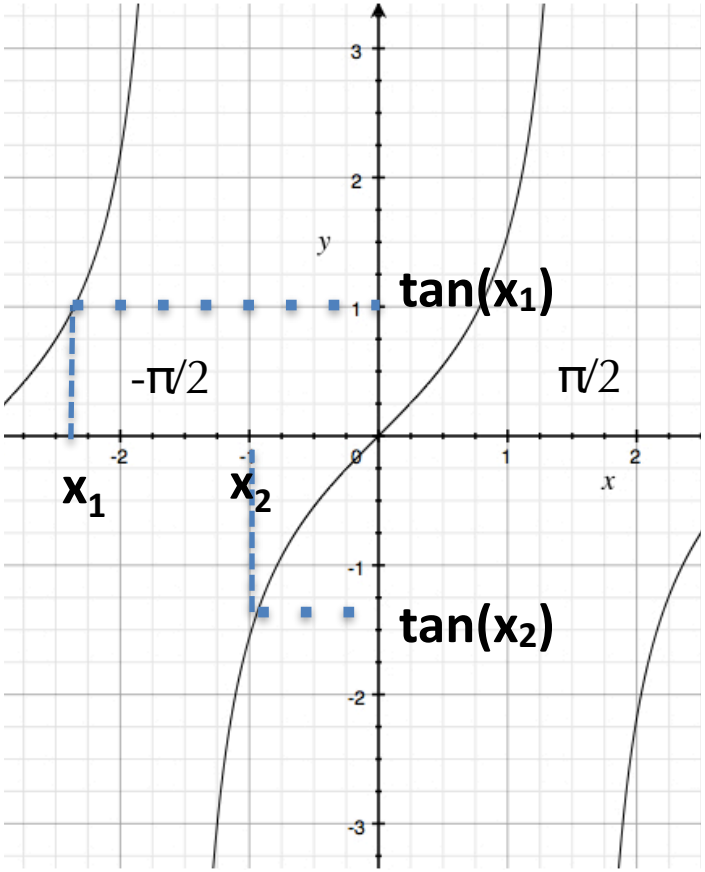
Funzione tangente

La funzione tangente è monotona?

NO!

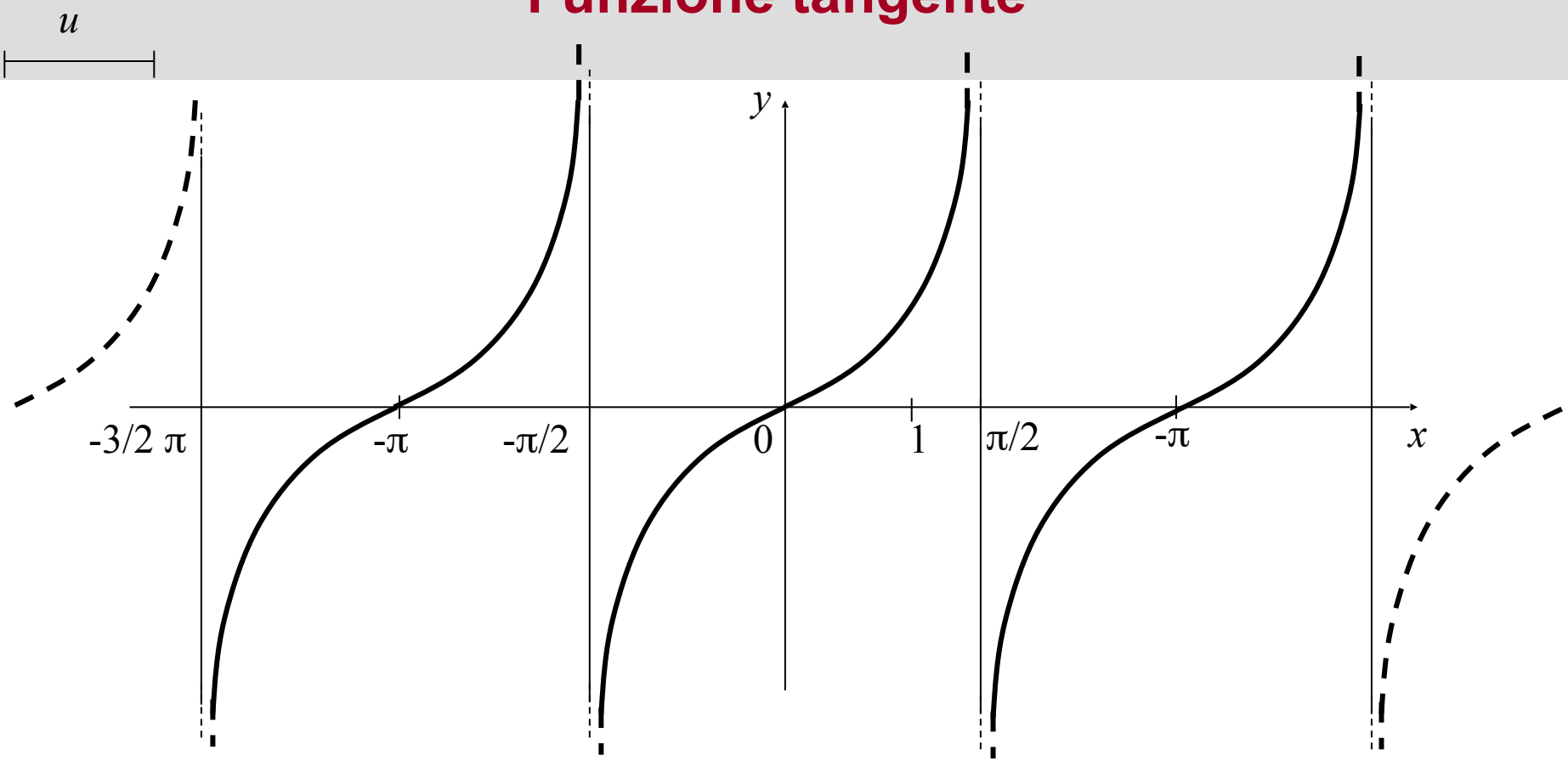
non è strettamente crescente in TUTTO il dominio

però…



$$x_1 < x_2 \quad \text{e} \quad \tan(x_1) > \tan(x_2)$$

Funzione tangente



$$\sup \tan x = +\infty; \inf \tan x = -\infty$$

f strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), \forall k \in Z$